COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

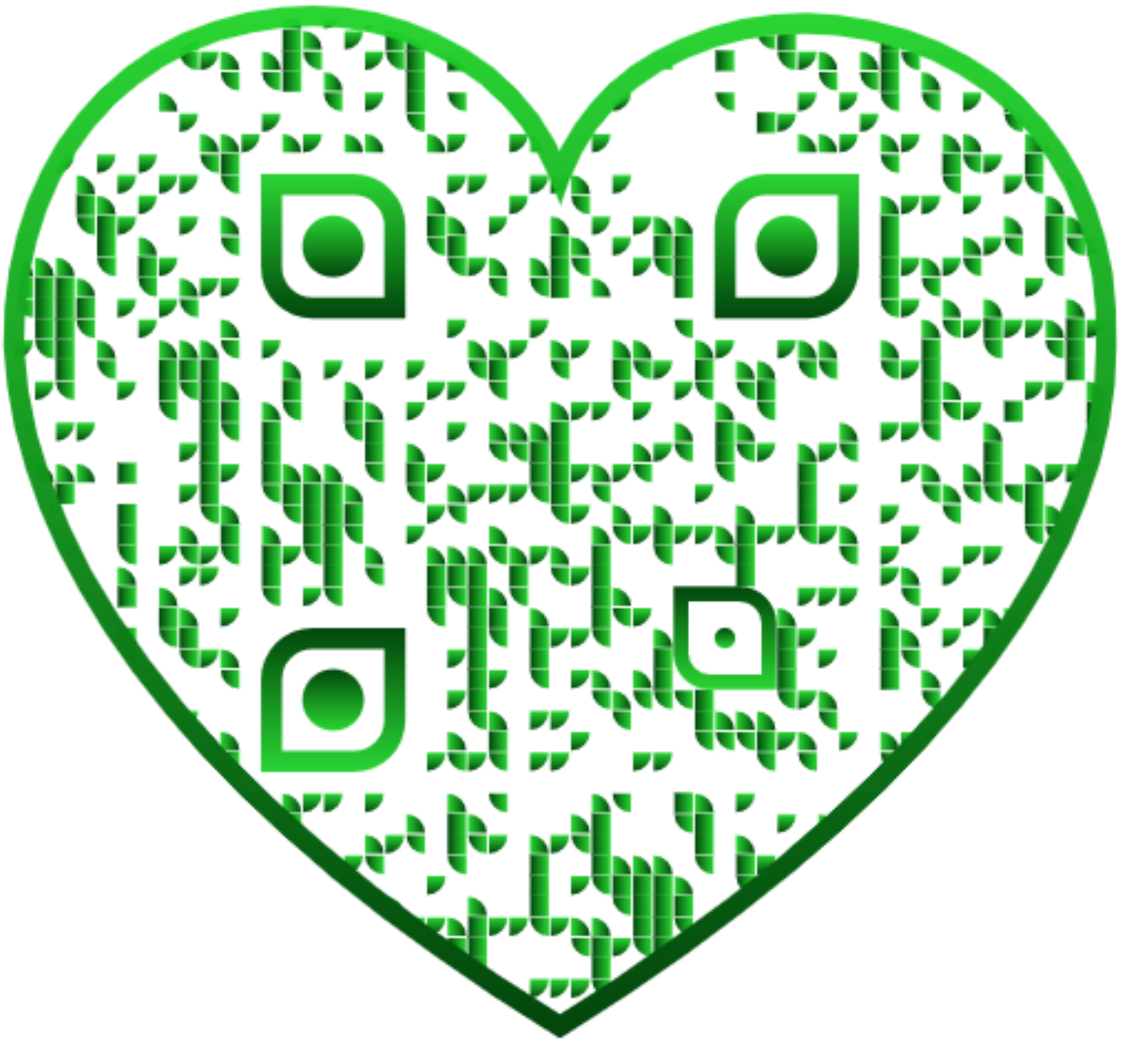
M1M2

Des équations différentielles aux systèmes dynamiques II

VERS LA THÉORIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Robert Roussarie et Jean Roux

EDP SCIENCES



DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES

Tome 2

Vers la théorie des systèmes dynamiques

Robert Roussarie et Jean Roux

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture : Figure du haut : diagramme de la bifurcation de Hopf-Takens de codimension 3. Figures du bas : (à gauche) portrait de phase d'un modèle de compétition de deux espèces (cas de leur coexistence) ; (à droite) portrait de phase de l'éclatement du déploiement de Bogdanov-Takens.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0654-6

Tous droits d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

© **2012, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos **vii**

1 Introduction **1**
1.1 Modélisation d'évolutions par champs de vecteurs et itérations 1
1.2 Équivalences entre systèmes dynamiques 5
1.3 Un survol des propriétés des systèmes dynamiques 8
1.4 Exemples de systèmes dynamiques 12
1.5 Plan du tome 2 18

2 Généricité et transversalité **23**
2.1 Germe 23
2.2 Topologie sur les espaces fonctionnels 24
2.2.1 Convergence de classe $\mathcal{C}^k$ sur les ouverts euclidiens . . 24
2.2.2 Généralisation aux variétés 31
2.3 La notion de généricité 32
2.4 Le lemme fondamental de transversalité 35
2.5 Le théorème de transversalité de Thom 42
2.5.1 Le cas euclidien 42
2.5.2 Formulation générale 45
2.6 Exemples de propriétés génériques 50
2.7 Remarques finales 52
2.7.1 Intérêt et limite du théorème de transversalité 52
2.7.2 Topologie de Whitney 54
2.7.3 Notion de singularité 55

3 Étude locale des singularités hyperboliques **59**
3.1 Points singuliers et points fixes hyperboliques 59
3.2 Champs et difféomorphismes linéaires hyperboliques 62

3.2.1 Champs contractants et contractions hyperboliques 65
3.2.2 Cas général d'un point de selle linéaire 70
3.3 Variétés invariantes locales 73
3.3.1 Variétés invariantes locales pour les difféomorphismes 74
3.3.2 Variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs 78
3.4 Le λ-Lemma de Palis 81
3.4.1 Quelques estimations préalables 83
3.4.2 Suites convergentes 85
3.4.3 Énoncés et preuves du λ-Lemma 88
3.5 Feuilletages invariants locaux 96
3.5.1 Le cas des champs de vecteurs 96
3.5.2 Le cas des difféomorphismes 99
3.6 Linéarisation topologique locale 102
3.7 Variétés invariantes globales 105

4 Systèmes dynamiques structurellement stables 111
4.1 Introduction 111
4.2 Stabilité structurelle locale 112
4.3 Stabilité des champs en dimension 1 116
4.4 Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre 0 . . 118
4.5 Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre ≥ 1 125
4.5.1 Champs de vecteurs du tore T^2 sans singularités . . . 125
4.5.2 Le cas général 135
4.6 Les systèmes de Morse-Smale généraux 137
4.7 Les ensembles hyperboliques 139
4.7.1 Le fer à cheval de Smale 139
4.7.2 Généralités sur les ensembles hyperboliques 156
4.7.3 Quelques autres exemples de systèmes hyperboliques 159
4.8 Au-delà de la stabilité structurelle 163
4.8.1 Non-généricité de la stabilité structurelle 163
4.8.2 Attracteurs non hyperboliques 165

5 Les bases de la théorie des bifurcations 167
5.1 Introduction 167
5.2 Premiers exemples de bifurcation 167
5.3 Déploiements versels pour les singularités 179
5.4 Réduction à une variété centrale 188
5.4.1 Champs de vecteurs et difféomorphismes 188

5.4.2 Déploiements de champs de vecteurs et de difféomorphismes . . . 189
5.5 Déploiements de type selle-nœud . . . 192
5.5.1 Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}$ . . . 192
5.5.2 Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}^2$ . . . 196
5.6 Formes normales . . . 197
5.6.1 Formes normales pour les champs de vecteurs . . . 198
5.6.2 Formes normales pour les déploiements de champs . . . 205
5.6.3 Formes normales pour les difféomorphismes . . . 206
5.7 Bifurcations de Hopf-Takens . . . 206
5.7.1 Digression sur les homéomorphismes de $\mathbb{R}^+$ . . . 209
5.7.2 Démonstration du théorème 5.14 . . . 214
5.7.3 Caractérisation des déploiements versels . . . 217

6 Compléments théorie des bifurcations 225
6.1 Désingularisation . . . 226
6.1.1 Désingularisation des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ . . . 228
6.1.2 Désingularisation des déploiements de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ . . . 233
6.2 La bifurcation de Bogdanov-Takens . . . 240
6.3 Déploiements de champs en dimension 2 . . . 243
6.3.1 Singularités de codimension ≤ 2 . . . 245
6.3.2 Sous-filtrations particulières . . . 246
6.3.3 Singularités de codimension ≤ 3 . . . 247
6.4 Déploiements d'orbites périodiques et polycycles . . . 248
6.4.1 Bifurcation des orbites périodiques . . . 250
6.4.2 Connection de selle de codimension 1 . . . 251
6.4.3 Déploiements génériques de polycycles hyperboliques 256
6.4.4 Connection de selle de codimension quelconque . . . 256
6.4.5 Autres résultats sur les bifurcations de polycycles . . . 258
6.5 Bifurcations globales sur la sphère . . . 260
6.5.1 Le problème de la cyclicité finie . . . 260
6.5.2 Le seizième problème de Hilbert infinitésimal . . . 265
6.5.3 Difficulté d'une théorie de bifurcation globale . . . 271

7 Le système de Lorenz 275
7.1 Les équations de la convection . . . 276
7.2 Formulation et approximation variationnelles . . . 277
7.3 Considérations générales . . . 279

7.4 Hypothèses du modèle et fonctions de base 281
7.4.1 Les conditions limites 282
7.4.2 Construction modale des fonctions ψ et θ 283
7.5 Le modèle de Lorenz 285
7.6 Étude partielle du modèle de Lorenz 287
7.6.1 Propriété de confinement du flot de $X_{a,b,r}$ 287
7.6.2 Étude des points singuliers de $X_{a,b,r}$ 289
7.6.3 Sous-criticité de la bifurcation de Hopf et comportement du modèle pour $r > r_0$ 299

Bibliographie **309**

Index **315**

AVANT-PROPOS

Le contexte et le plan général de l'ouvrage ont été donnés dans l'avant-propos du tome 1. Le tome 1 est composé de deux parties (I et II). La partie I rappelle les notions de topologie différentielle indispensables à une lecture autonome des deux tomes de l'ouvrage. La partie II est un cours classique sur la théorie qualitative des équations différentielles, basé sur le théorème de Cauchy d'existence et d'unicité locales des trajectoires de ces équations et sur la notion centrale de flot d'un champ de vecteurs. Précisons le plan du tome 2.

Dans un chapitre d'introduction, on donne quelques définitions de base ainsi que des exemples de systèmes dynamiques. Dans le deuxième chapitre, on introduit quelques idées importantes dues à René Thom, à savoir la notion de généricité déjà mentionnée et son rapport avec celle de la transversalité. Ces questions sont développées, par exemple le lemme fondamental de transversalité puis les différentes versions du théorème de transversalité de Thom et la notion de singularité. Pour donner au lecteur les outils dont il a besoin, on a inclu quelques précisions sur les espaces fonctionnels (y compris une preuve de la convergence en classe $\mathcal{C}^k$ sur les compacts) et sur les fibrés différentiels. Le troisième chapitre est consacré à l'étude locale des points singuliers et des orbites périodiques hyperboliques. Après la présentation de la classification des dynamiques linéaires hyperboliques, on s'est contenté de donner une idée de la preuve de l'existence des variétés invariantes. En se basant sur ce résultat d'existence, on donne une preuve assez complète du λ-Lemma et de l'existence de feuilletages locaux invariants. Ces résultats permettent de proposer une présentation géométrique du théorème de linéarisation de Hartman-Grobman, dans le même esprit que dans [52], texte qui nous a servi de guide pour ce chapitre, et pour une partie du chapitre suivant. Le quatrième chapitre est consacré à la notion de stabilité structurelle qui, localement, se réduit à la stabilité structurelle des points singuliers hyperboliques établie dans le troisième chapitre. On se contente d'étudier de façon approfondie quelques exemples importants de systèmes structurellement stables : les champs de vecteurs de Morse-Smale sur les surfaces de genre 0 et la dynamique de type

fer à cheval de Smale pour un difféomorphisme en dimension 2, incluant évidemment la preuve de l'existence de ce type de dynamique au voisinage des points homoclines transverses.

Les deux chapitres suivants (5 et 6) sont consacrés à une présentation de la théorie des bifurcations, avec surtout des développements théoriques sur les familles de champs de vecteurs en dimension 2, sur le plan ou la sphère S^2. L'ensemble de ces deux chapitres n'est cependant qu'une introduction à la théorie des bifurcations des systèmes dynamiques. Le chapitre 5 expose les concepts fondamentaux de cette théorie. On y donne les définitions de base concernant les familles à paramètres et les déploiements de systèmes dynamiques, la notion de déploiement versel et celle de codimension pour une singularité, ainsi que le rapport avec la notion de transversalité introduite dans le deuxième chapitre, notion qui trouve ici toute son utilité. Un modèle simple de théorie de bifurcation est la théorie des catastrophes de René Thom. Cette théorie sert de modèle à celle présentée ici pour les champs de vecteurs, qui utilise aussi, directement, les résultats de la théorie des catastrophes. C'est pourquoi les catastrophes élémentaires sont présentées avec quelques développements. Les résultats connus pour les bifurcations de champs de vecteurs en dimension 2 sont présentés dans le texte, avec un accent mis sur les plus élémentaires, à savoir les bifurcations de type selle-nœud et les bifurcations de type Hopf-Takens. On introduit aussi deux outils nécessaires à la théorie des bifurcations : la réduction à une variété centrale et la mise en forme normale.

Le chapitre 6 poursuit l'examen de méthodes utiles à la théorie des bifurcations. Parmi les compléments possibles, nous avons distingué la désingularisation par éclatement des singularités et des déploiements de champs ainsi que le développement asymptotique de l'application de retour au voisinage d'un polycycle. Ces méthodes sont plus récentes et donc moins connues que celles introduites dans le chapitre 5, mais elles occupent une part croissante dans l'étude des bifurcations. Le chapitre se poursuit par l'évocation du seizième problème de Hilbert, de la question de la cyclicité finie et du rôle joué par les intégrales abéliennes dans l'étude des bifurcations de champs de vecteurs. On conclut par un exemple illustrant la difficulté de développer une théorie de la bifurcation pour des champs définis globalement sur toute une variété, même dans le cas le plus simple des champs sur la sphère S^2. Ce chapitre 6 est, de tout l'ouvrage, celui qui est le plus nettement orienté vers la recherche. Il est dédié essentiellement aux lecteurs qui veulent étudier les bifurcations des systèmes dynamiques de façon plus approfondie.

Le dernier chapitre est consacré au modèle de Lorenz dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Il est l'occasion de jeter un pont entre les systèmes dynamiques en dimension infinie et leur réduction éventuelle en dimension finie, le modèle

de Lorenz proprement dit dans le cas considéré. Ce modèle de Lorenz est une famille à paramètres de champ de vecteurs polynomial quadratique dans $\mathbb{R}^3$. On étudie les bifurcations de points critiques, ce qui donne une illustration du chapitre précédent sur les bifurcations. On présente aussi succinctement l'attracteur de Lorenz apparaissant dans ce système. On ne donne pas de détails sur le modèle théorique, l'attracteur de Lorenz géométrique, qui est très largement étudié dans la littérature.

Les références au tome 1 sont toujours précédées par un I ou II selon la partie concernée à l'intérieur de celui-ci.

R. Roussarie, J. Roux
10 mai 2011

This page intentionally left blank

1

INTRODUCTION

Le tome 2 doit être vu comme une introduction à l'étude des systèmes dynamiques telle qu'elle est comprise de nos jours. Cette introduction est pensée comme un prolongement du tome 1, avec l'objectif de montrer comment les idées et résultats élémentaires, relatifs au calcul différentiel et à la théorie classique des équations différentielles ordinaires, conduisent très naturellement aux idées et résultats plus modernes concernant la théorie des systèmes dynamiques. Les variétés, applications, difféomorphismes et champs de vecteurs sont considérés de classe $\mathcal{C}^\infty$, sauf mention expresse du contraire.

1.1. Modélisation d'évolutions par champs de vecteurs et itérations

Dans la partie II du tome 1, nous avons étudié la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires (c'est-à-dire des équations différentielles en dimension finie). Rappelons qu'une équation différentielle sur une variété M, par exemple, est une équation de la forme :

$$\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t)),$$

où la donnée est un champ de vecteurs $X : x \in M \mapsto X(x) \in T_xM$, et où l'équation porte sur une application inconnue $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto M$. La signification de cette équation est que toute solution φ doit vérifier que, pour tout t, le vecteur dérivé $\frac{d\varphi}{dt}$ (à valeurs dans T_xM) doit être égal à la valeur $X(x)$ du champ de vecteurs au point $x = \varphi(t)$. Nous avons montré que sous des conditions minimales de régularité du champ, une telle solution existe et est unique, si on la

considère définie sur un intervalle de temps maximal et si l'on fixe une condition initiale $\varphi(0) = x$ (théorème de Cauchy). Cette solution est appelée la trajectoire (maximale) par le point x. Nous allons supposer, pour simplifier, que le champ est complet, c'est-à-dire que chaque trajectoire est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut alors interpréter la trajectoire comme une évolution d'un système qui serait paramétré par les points de M, l'espace des états du système considéré. Le champ de vecteurs lui-même est la loi de l'évolution : cette loi précise que si le système est, à l'instant t, dans l'état représenté par la valeur $x = \varphi(t)$, alors sa vitesse d'évolution au temps t est donnée par le vecteur $X(x)$ en ce point $x = \varphi(t)$. Rappelons que l'on appelle flot du champ, l'application $\varphi : (t, x) \in \mathbb{R} \times M \mapsto \varphi(t, x) \in M$ qui, pour chaque $x \in M$, donne la trajectoire $t \mapsto \varphi(t, x)$ par x avec $\varphi(0, x) = x$. L'unicité de chaque trajectoire, et donc du flot lui-même, signifie qu'une loi définie par une équation différentielle est déterministe. La terminologie de flot fait allusion au mouvement d'une particule emportée par le flot d'un liquide qui aurait une évolution à vitesse dépendante de la position, mais pas de l'instant considéré, et dont le mouvement est déterminé par la donnée d'un champ de vecteurs figé dans le fluide (on parle d'écoulement laminaire).

Rappelons encore que le flot a des propriétés remarquables qui permettent de donner un sens précis à la notion d'évolution, dans le cas où cette évolution est modélisée par une équation différentielle ordinaire. À chaque instant t on peut considérer les points $\varphi(t, x)$ atteints à partir de toutes les conditions initiales x possibles. Cela définit une application $\varphi_t : x \mapsto \varphi(t, x)$ de M dans M. Rappelons que cette application est en fait un difféomorphisme qui peut être considéré comme la déformation induite, dans l'espace des états, par l'ensemble des mouvements particuliers donnés par chaque trajectoire. On définit ainsi une application du temps $t \in \mathbb{R}$, à valeurs dans le groupe $\mathcal{D}(M)$ des difféomorphismes de M : $t \mapsto \varphi_t(\cdot) \equiv \varphi(t, \cdot) \in \mathcal{D}(M)$. Cette application vérifie la remarquable propriété suivante qui en fait une représentation de groupe :

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}. \tag{1.1}$$

La formule (1.1) signifie que l'évolution est indépendante de l'instant de départ considéré. Cela est évidemment une conséquence de la forme de l'équation différentielle, qui nous dit que la vitesse du mouvement ne dépend que de la position considérée et non de l'instant considéré. Autrement dit, l'évolution ne dépend pas du passé.

Une équation différentielle ordinaire est un exemple particulier de système dynamique. On appelle *système dynamique*, en toute généralité, un système en évolution dans le temps.

Nous venons de voir que la loi définie par une équation différentielle ordinaire a des propriétés très particulières qui restreignent évidemment la classe

des phénomènes modélisables. Ce phénomène doit être déterministe. On ne peut donc pas modéliser les phénomènes microscopiques du monde quantique modélisés, dans le cadre de la mécanique quantique, par des lois non déterministes. Le système doit être décrit localement par un nombre fini de variables. Cela exclut les phénomènes en milieux continus qui doivent être modélisés par des équations aux dérivées partielles et/ou intégrales définies dans des espaces fonctionnels (de dimension infinie). Il ne peut pas y avoir de mémoire du passé comme dans la plupart des évolutions racontant une histoire (théorie de l'Évolution, événements historiques, phénomènes d'hystérésis, etc.). La prise en compte (au moins partielle) du passé nécessite, par exemple, des termes de retard, et l'évolution aura alors pour cadre un espace fonctionnel.

Les équations différentielles ordinaires ne peuvent donc modéliser que des évolutions très simples : déterministes, dans un milieu de dimension finie et qui ne dépendent que des conditions initiales. Néanmoins, les équations différentielles ordinaires ont un domaine d'application assez large. Nous détaillerons quelques-unes d'entre elles dans une section suivante. On peut citer, par exemple, la mécanique classique et la mécanique céleste (préalable à toutes les applications en astronautique, repérages géographiques par gps, etc.), l'électrocinétique, la dynamique chimique, la dynamique des populations. De façon générale, cette modélisation suppose que le milieu est formé de constituants homogènes (espèces chimiques, populations, ...), chacun décrit par une seule variable et, évidemment, que l'évolution dépend d'une loi de type équation différentielle. Rappelons qu'une équation différentielle d'ordre quelconque se ramène à une équation différentielle d'ordre un associée à un champ de vecteurs. Par exemple, les équations d'ordre deux de la mécanique classique sont équivalentes à des équations de champs de vecteurs définis sur l'espace élargi des positions-vitesses, appelé espace de phase.

Les itérations d'applications sont des exemples encore plus simples de dynamique. On considère, dans ce cas, une application f de M dans M et la dynamique est définie par l'itération de f : l'orbite d'un point $x \in M$ est la suite de points : $x, f(x), f \circ f(x), \ldots, f^{\circ n}(x), \ldots$ (s'il n'y a pas d'ambiguïté on écrit simplement simplement $f^n(x)$ pour la puissance d'itération $f^{\circ n}(x)$). On considère qu'une application f définit une dynamique à temps discret $n \in \mathbb{N}$. Lorsque f est un difféomorphisme de M, on peut itérer f pour les $n < 0$ dans $\mathbb{Z}$ (l'inverse f^{-1} est par définition la puissance d'itération « d'ordre -1 » ; on note par f^{-n} l'itéré n fois de f^{-1}). On a ainsi une analogie complète entre l'itération d'un difféomorphisme et le flot d'un champ complet, où le temps discret dans $\mathbb{Z}$ est l'analogue du temps continu dans $\mathbb{R}$.

Un exemple très simple de système dynamique modélisé par une itération est l'évolution d'une population isolée, dont la densité à la n-ième génération est égale

à $x_n \in [0,1]$. L'équation logistique introduite par Robert May en 1976 :

$$x_n \mapsto x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n),$$

est la plus simple loi non linéaire que l'on peut utiliser. On itère la fonction $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Le paramètre μ doit être choisi dans l'intervalle $[0,4]$ pour que $f([0,1]) \subset [0,1]$. La version continue de cette équation avait été introduite en 1845 par Jean-François Verhulst.

Une autre raison de considérer les itérations de difféomorphismes est leur relation avec les champs de vecteurs, via l'application de Poincaré sur une section locale au voisinage d'une orbite périodique de champ de vecteurs ou, plus globalement, l'application de Poincaré sur une section globale (voir chapitre II-6). Dans le premier cas, on obtient un difféomorphisme local de la section au voisinage d'un point fixe, section que l'on peut supposer être un disque. Dans le second cas, on a un difféomorphisme de la section qui est une sous-variété de codimension 1 de M. Dans les deux cas, les propriétés dynamiques de l'application de Poincaré sont très liées à celles du champ. Nous rappellerons cette correspondance dans une prochaine section.

Quoique la modélisation par équation différentelle (ou itération) puisse sembler trop simple (et même simpliste), l'évolution d'un tel système peut être très compliquée comme cela est apparu dès les travaux fondateurs de Poincaré. En fait, la plupart des propriétés générales de phénomènes d'évolutions dans les systèmes dynamiques généraux ont pu être dégagées et étudiées dans le cadre plus simple des équations différentielles ordinaires et des itérations. La théorie des systèmes dynamiques en dimension finie, équations différentielles ordinaires et itérations discrètes, a donc servi, en quelque sorte, de paradigme pour la théorie de l'évolution des systèmes dynamiques généraux. On peut citer, par exemple, les notions qualitatives sur les trajectoires et leur stabilité, les notions diverses d'attracteurs, de bassins d'attraction, de leur nature géométrique (structure fractale, invariance par renormalisation), les notions plus fines introduites pour décrire les propriétés qualitatives dynamiques, comme la dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales, l'entropie topologique de la dynamique et, en termes plus vagues, la notion d'évolution chaotique, ainsi que les notions liées aux perturbations du système : stabilité structurelle, prédictibilité (et non-prédictibilité) d'une évolution, et la(es) théorie(s) de la (des) bifurcation(s). Toutes ces propriétés et tous ces phénomènes apparaissent déjà dans le cadre le plus simple, par exemple celui des itérations en dimension 1 (application unimodale ou logistique modélisant l'évolution d'une seule population, introduite ci-dessus). Nous ferons un premier survol de ces propriétés dans un paragraphe suivant. Enfin, il faut noter que l'étude des équations différentielles ordinaires et des itérations donne lieu à des questions très

difficiles et souvent encore non résolues (par exemple, le seizième problème de Hilbert sur les champs de vecteurs polynomiaux du plan).

1.2. Équivalences entre systèmes dynamiques

Une préoccupation majeure de la théorie des systèmes dynamiques est la description des propriétés qualitatives de l'évolution du système. On est ainsi amené à classifier les systèmes, c'est-à-dire à regrouper ceux qui présentent des propriétés similaires. Cela conduit évidemment à définir des notions d'équivalence entre systèmes, de façon que deux systèmes équivalents aient les mêmes propriétés dynamiques. Il s'est avéré que les propriétés les plus intéressantes étaient les propriétés ayant une description topologique. Les propriétés ayant une description plus fine, par exemple utilisant la structure différentiable ou analytique, conduiraient en effet à une classification trop fine. Par exemple, le fait qu'une orbite soit périodique est de nature topologique. Par contre, le spectre des valeurs propres en un point singulier d'un champ de vecteurs est de nature différentiable.

En conséquence, il est naturel de demander que deux systèmes soient équivalents s'ils sont les mêmes, à homéomorphisme près, sur la variété M. Cela revient à définir, de façon tautologique, les propriétés dynamiques comme étant les propriétés définissables en termes topologiques. Cette définition est plus facile à donner pour les itérations, aussi nous allons commencer par ce cas.

Définition 1.1. Soit f, g deux applications définies sur la même variété M. On dit que f et g sont (topologiquement) conjuguées s'il existe un homéomorphisme h de M tel que

$$h \circ f = g \circ h.$$

On écrira que $f \sim_h g$ ou bien simplement $f \sim g$.

Il est trivial de vérifier que cette relation $\sim$ est bien une relation d'équivalence dans l'espace des applications sur M. On appelle cette relation d'équivalence : *conjugaison topologique*. D'autre part, il est par exemple clair que le fait qu'une orbite soit périodique, la valeur de la période, le fait qu'un compact soit un attracteur, sont bien des propriétés invariantes par conjugaison topologique. Comme on l'a dit, il en sera de même par définition pour toutes les propriétés dynamiques que l'on pourra définir pour les applications, considérées comme des systèmes dynamiques (c'est-à-dire lorsqu'on les itère).

Pour les flots de champs de vecteurs, on peut définir une équivalence analogue :

Définition 1.2. Soit X, Y deux champs de vecteurs définis sur la même variété M, de flot respectivement φ et ψ. On dit que X et Y sont (topologiquement) conjugués, s'il existe un homéomorphisme h de M tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$, on ait

$$h \circ \varphi(t, x) = \psi(t, h(x)).$$

On voit que deux champs sont conjugués si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les difféomorphismes φ_t et ψ_t sont équivalents au sens de la définition 1.1. Il est trivial que cette relation de conjugaison est bien une relation d'équivalence qui préserve, par exemple, le fait qu'une orbite soit périodique et la valeur de la période.

Cependant, cette dernière invariance est manifestement trop exigeante, car la période d'une orbite périodique n'a aucune raison d'être préservée par petite perturbation du champ. Avec cette relation d'équivalence, il n'y aurait aucun champ de vecteurs structurellement stable, au sens que nous allons introduire ci-dessous. Pour ce genre de raisons, on préfère utiliser une notion plus faible d'équivalence ne préservant pas le temps :

Définition 1.3. Soit X, Y deux champs de vecteurs définis sur la même variété M. On dit que X et Y sont (topologiquement) équivalents, s'il existe un homéomorphisme h de M tel que, pour tout $x \in M$, l'homéomorphisme h envoie l'orbite de X par le point x sur l'orbite de Y par le point $h(x)$.

On écrira $X \sim_h Y$ ou simplement $X \sim Y$.

Il est clair que cette relation $\sim$ (qui est bien une relation d'équivalence) préserve le fait qu'une orbite est périodique (parce qu'une orbite périodique est compacte et qu'un homéomorphisme préserve les compacts), mais pas la valeur de la période. En fait, chaque orbite de X est envoyée homéomorphiquement par h sur une orbite de Y, mais sans préserver nécessairement le temps. On appelle cette relation d'équivalence tout simplement : *équivalence topologique* entre champs de vecteurs.

Remarque 1.1.

1. Dans les définitions précédentes il n'est pas nécessaire de supposer que les deux dynamiques (flots ou itérations) sont définies sur la même variété. Par exemple, si f est une application définie sur M_1 et g est une application

définie sur M_2, il suffirait de supposer que h est un homéomorphisme entre M_1 et M_2. Seulement, dans ce cas, la relation $\sim$ n'est plus une relation d'équivalence comme cela l'était entre les applications d'une même variété.

2. Pour tout $r = 1, \ldots, +\infty$ on peut définir la notion de $\mathcal{C}^r$-conjugaison ou de $\mathcal{C}^r$-équivalence entre applications ou champs de vecteurs, en supposant que l'homéomorphisme h des définitions précédentes est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$. Par exemple si $Y = fX$, où X, Y sont des champs de vecteurs et f une fonction strictement positive de classe $\mathcal{C}^\infty$, les deux champs sont $\mathcal{C}^\infty$-équivalents (avec $h = \mathrm{Id}_M$).

   Sauf cas très particulier, ces relations seraient trop restrictives pour donner lieu à des résultats intéressants. Par exemple une $\mathcal{C}^1$-conjugaison entre deux difféomorphismes doit préserver le spectre des valeurs propres de deux points fixes correspondants. Or un tel spectre est modifié par des $\mathcal{C}^\infty$-perturbations arbitrairement petites. Nous avons déjà remarqué que la relation de conjugaison (même topologique) n'est pas pertinente entre champs de vecteurs. Aussi la seule relation d'équivalence raisonnable est la conjugaison (topologique) pour les applications et l'équivalence (topologique) pour les champs de vecteurs. *Dorénavant le qualificatif de topologique sera implicite.*

Nous allons maintenant considérer les champs de vecteurs admettant une section globale, tels qu'ils ont été introduits dans le chapitre II-6. Dans ce chapitre nous avons analysé la relation existant entre le champ de vecteurs X et le difféomorphisme défini par son application de premier retour h_X. De cette analyse nous pouvons tirer le résultat suivant :

Proposition 1.1. *Soit X, Y deux champs de vecteurs sur une même variété M et admettant la même section globale Σ. Soit $h_X, h_Y : \Sigma \mapsto \Sigma$ les applications de Poincaré de X et Y respectivement. Alors, si les applications h_X et h_Y sont conjuguées, les champs X et Y sont équivalents.*

Démonstration. Rappelons qu'à $\mathcal{C}^\infty$-équivalence près, on peut supposer que le temps de retour sur Σ pour les deux champs est égal à 1 (proposition II-6.3). On désigne par φ_X, φ_Y les flots de X, Y respectivement. Soit ψ une conjugaison entre h_X et h_Y. On peut relever (prolonger) cette conjugaison en une équivalence Ψ entre X et Y de la façon suivante. Puisque Σ est une section globale, tout point de M s'écrit $\varphi_X(t, m)$, avec $m \in \Sigma$ et $t \in [0, 1[$, et on définit Ψ par : $\Psi(\varphi_X(t, m)) = \varphi_Y(t, \psi(m))$. On a $\Psi|_\Sigma = \psi$ car $\Psi(m) = \psi(m)$ pour $m \in \Sigma$. Le fait que ψ soit une conjugaison entre h_X et h_Y implique que Ψ est bien défini et est une équivalence entre X et Y d'après la définition 1.2. ∎

Remarque 1.2. Nous ne savons pas si la proposition 1.1 admet une réciproque. Si c'est le cas, elle doit être de démonstration délicate.

La proposition 1.1 permet de déduire de l'étude des difféomorphismes en dimension $n-1$, à conjugaison près, des résultats sur les champs avec section globale en dimension n, à équivalence près. En fait, cette correspondance se prolonge à l'étude de la stabilité structurelle qui sera faite au chapitre 4, ainsi qu'à l'étude des bifurcations qui sera faite aux chapitres 5 et 6. Cela provient du fait que l'existence d'une section globale pour un champ sur une variété *compacte* est une propriété stable par petites perturbations de classe $\mathcal{C}^1$.

Cette correspondance n'a évidemment pas de sens pour les champs de vecteurs généraux (par exemple un champ ayant des points singuliers ne peut pas avoir de section globale, voir l'item 4 des propriétés d'une section globale de champs de vecteurs dans le paragraphe II-6.2.1).

1.3. Un survol des propriétés des systèmes dynamiques

Ces propriétés peuvent être introduites pour les systèmes dynamiques généraux, mais nous nous contenterons ici de le faire dans le contexte qui nous intéresse, c'est-à-dire celui du flot d'un champ de vecteurs ou de l'itération d'une application. Les notions qualitatives élémentaires ont été introduites dans la partie II du tome 1. Nous les rappelons ici et les complétons par l'introduction de nouvelles propriétés. Nous supposerons que la dynamique est définie sur une variété M. Rappelons que le champ X est supposé complet.

(1) Nature des orbites. L'orbite d'un champ de vecteurs X par $x \in M$ est l'image orientée de la trajectoire $\gamma_x = \varphi(\mathbb{R}, x)$. Pour une itération par un difféomorphisme f, on définit l'orbite $\mathcal{O}_f = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (si f est une application non inversible, on ne peut définir que la demi-orbite positive $\mathcal{O}_f^+ = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$). Une orbite de champ peut être réduite à un point singulier p, c'est-à-dire un point pour lequel $X(p) = 0$. L'orbite par x sera dite périodique s'il existe un plus petit $T > 0$ (la période) tel que $\varphi(T, x) = x$. L'orbite γ_x est alors difféomorphe à un cercle. Dans le cas d'une application, l'orbite par x est périodique s'il existe un plus petit $N > 0$ (la période) tel que $f^N(x) = x$. Ces orbites constituent ce que l'on appelle parfois les états stationnaires ou oscillants du système (dans le cas des champs de vecteurs).

(2) Récurrence. L'ensemble limite $\omega_f(x)$ pour une application f est l'ensemble des limites des suites $f^{n_i}(x)$ avec $(n_i) \to +\infty$. Cet ensemble qui est invariant par f et non vide, si M est compact par exemple, décrit le destin du mouvement à partir du point x. On définit de façon analogue l'ensemble limite $\omega_X(x)$ pour un

champ X (voir le chapitre II-5). L'orbite par x, d'une application f, est récurrente, si pour tout voisinage V de x et tout $N > 0$, il existe un $p \geq N$ tel que $f^p(x) \in V$. C'est équivalent à dire que $x \in \omega_f(x)$. On a une définition analogue pour les champs (voir le chapitre II-5). Une orbite périodique ou un point singulier d'un champ, une orbite périodique d'une application, sont des orbites récurrentes. On parle alors de récurrence triviale dans ces cas. Par contre, l'orbite de tout point pour une rotation irrationnelle sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ou bien chaque orbite du flot irrationnel du tore T^2 (voir le chapitre II-5), est une récurrence non triviale. Nous donnerons plus tard, dans le chapitre 4, des exemples beaucoup plus compliqués de récurrence non triviale.

(3) Attracteurs. C'est une notion centrale de la théorie des systèmes dynamiques et beaucoup de définitions différentes en ont été données. La définition la plus simple et la plus généralement admise est la suivante :

Définition 1.4. Soit f un difféomorphisme. Un attracteur K de f est un compact, non vide, invariant, ayant un voisinage ouvert U (U est un ouvert contenant K) vérifiant $f(\bar{U}) \subset U$, et tel que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$. Si X est un champ de vecteurs de flot φ_t (supposé complet pour les temps positifs), un attracteur K de X est un compact, non vide, invariant, ayant un voisinage ouvert U vérifiant $\varphi_t(\bar{U}) \subset U$ pour tout $t > 0$ et tel que $K = \cap_{t\geq 0}\varphi_t(U)$.

On suppose en général que, de plus, K est *topologiquement transitif*, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ avec $\bar{\gamma}_x = K$ (orbite dense). Cela implique que l'attracteur est *minimal* (pour l'inclusion).

On voit que l'attracteur K attire tous les points du voisinage U : pour tout $x \in U$, on a $f^n(x) \to K$ pour $n \to +\infty$ (ou bien $\varphi_t(x) \to K$ pour $t \to +\infty$). Cela est équivalent à dire que $\omega_f(x) \subset K$ (ou bien $\omega_X(x) \subset K$). Cette condition est parfois relaxée en demandant que K n'attire qu'un ouvert dense dans U, ou bien soit le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

Le *bassin* $\mathcal{B}_f(K)$ (ou bien $\mathcal{B}_X(K)$) de K est le plus grand sous-ensemble U, avec U défini comme dans la définition 1.4. On peut donc aussi le définir comme l'ensemble des « points attirés » par K. Cet ensemble est un ouvert, car si U est un voisinage ouvert de K comme dans la définition 1.4, $\mathcal{B}_f(K)$ (ou bien $\mathcal{B}_X(K)$) est égal à $\cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ (ou bien à $\cup_{t\in\mathbb{R}}\varphi_t(U)$).

Cette notion d'attracteur généralise celle de point singulier ou d'orbite périodique stable étudiée au chapitre II-7. Un attracteur général peut avoir une dynamique compliquée, comme on en verra des exemples dans les chapitres 4 et 7. Quelques notions importantes ont été introduites pour décrire cette complexité,

jouant un rôle essentiel dans la compréhension moderne des systèmes dynamiques : dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales, structure fractale, renormalisation, entropie topologique.

Par exemple, la dynamique sur l'attracteur K a une dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales, s'il existe $\delta > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on ait $x, y \in K$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{dist}(x, y) \leq \varepsilon$ et $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Autrement dit, il existe alors des paires de points arbitrairement proches qui finissent par s'écarter de façon notable (de plus de δ) après suffisamment d'itérations. Cela signifie que la dynamique sur K n'est guère prédictible, puisqu'un écart arbitrairement petit sur les conditions initiales peut s'amplifier de façon notable. Le phénomène pourra être encore plus important s'il a lieu avec une vitesse exponentielle par rapport au nombre des itérations (cela se manifeste dans un comportement hyperbolique, et sera en relation avec une entropie topologique strictement positive).

(4) Stabilité structurelle. Les propriétés introduites jusqu'à maintenant sont relatives à une seule dynamique fixée. On peut aussi considérer des notions relatives aux perturbations de la dynamique considérée. Pour introduire avec précision ces notions, il est nécessaire de considérer l'espace des dynamiques muni d'une topologie qui permette de donner un sens à la notion de « petite perturbation ». Nous ferons cela dans le prochain chapitre, en introduisant les topologies $\mathcal{C}^k, 0 \leq k \leq +\infty$, sur les espaces fonctionnels dans lesquels habitent les systèmes dynamiques : l'espace $\chi^k(M)$ des champs de vecteurs, les espaces d'applications et de difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$. Ces topologies permettront de préciser la « force » de la perturbation considérée : une perturbation sera d'autant plus forte qu'elle sera faite avec une différentiabilité faible. Une fois la classe de différentiabilité fixée, on peut évidemment parler de la grandeur (amplitude) de la perturbation (en général on parlera de « petite perturbation » pour dire que l'on considère des perturbations arbitrairement petites).

Dans le chapitre 4, on étudiera la notion de *stabilité structurelle.* Disons succinctement qu'une application f est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^k$, si toute application g de classe $\mathcal{C}^k$ assez proche de f (dans un « petit voisinage » de la $\mathcal{C}^k$-topologie) lui est équivalente. On a une définition similaire pour les champs de vecteurs. On voit qu'une dynamique est structurellement stable si « elle reste la même » par petite perturbation, à équivalence près (pour les dynamiques définies par champs de vecteurs, « rester la même » est équivalent à dire « avoir le même portrait de phase »). Il est clair que la stabilité structurelle semble être une propriété indispensable si l'on veut utiliser un système dynamique comme modèle d'une évolution : en effet la simplification due à la modélisation elle-même, les erreurs introduites dans les mesures, leur imprécision (lorsqu'on modélise par exemple un milieu continu par un modèle en dimension finie), introduisent de

façon systématique une perturbation (que l'on espère être petite !). La stabilité structurelle du modèle permet de penser que l'évolution du phènomène modélisé est comparable à l'évolution prédite par le modèle (évolution qui peut être, par exemple, obtenue, faute de mieux, par simulation numérique).

La notion de stabilité structurelle est donc liée de façon intime à la notion de prédictabilité, que l'on a évoquée plus haut, mais de manière plus subtile qu'avec la stabilité des trajectoires. En effet on verra, dans le chapitre 4, qu'il existe des systèmes structurellement stables mais avec une dynamique compliquée ayant, par exemple, une dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales. Supposons par exemple que le modèle soit structurellement stable, mais possède un attracteur K ayant la propriété de dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales. L'évolution du phénomène est bien associée à une orbite du système (disons dans K), mais comme il est impossible en pratique de trouver cette orbite précisément, on doit en conclure que l'évolution est non prédictible. La stabilité structurelle n'est donc pas synonyme de prédictibilité. Pour paraphraser le titre du l'ouvrage de Bergé-Pomeau-Vidal [5], on peut avoir de « l'ordre dans le chaos ».

Les difféomorphismes de M qui sont $\mathcal{C}^k$-structurellement stables forment un ouvert $\mathcal{U}$ dans l'espace $\mathcal{D}^k(M)$ des difféomorphismes de M de classe $\mathcal{C}^k$. Cet ouvert se décompose en classes d'équivalence elles-mêmes ouvertes. Dans chaque classe le système reste le même à équivalence près. Beaucoup de travaux ont été faits pour comprendre cet ouvert de stabilité $\mathcal{U}$ et sa partition en classes d'équivalence. Smale avait initialement conjecturé que $\mathcal{U}$ était dense. On a vite compris que cela n'était malheureusement pas le cas. Par la suite, on a réussi à caractériser les difféomorphismes structurellement stables (du moins pour la différentiabilité $k = 1$) et, dans une autre direction, on a tenté d'affaiblir la notion de stabilité structurelle de façon à décrire un ensemble dense de dynamiques : par exemple en s'attachant à la description des seuls attracteurs. Un point précis de l'état actuel du sujet peut être trouvé dans [6].

(5) Bifurcations. La théorie des bifurcations, qui sera abordée dans les chapitres 5 et 6, s'intéresse à la façon dont un système change, lorsque l'on passe d'une classe ouverte de systèmes structurellement stables à une autre. On peut dire aussi qu'il s'agit d'étudier les systèmes à la frontière de l'ouvert de stabilité structurelle $\mathcal{U}$. Pour des raisons pratiques on s'intéresse, dans un premier temps, à l'étude des bifurcations dans des familles de systèmes dépendants d'un nombre fini de paramètres (on peut les interpréter comme des sous-familles de dimension finie dans l'espace de dimension infinie de tous les systèmes). Alors que l'étude de la stabilité structurelle a pu se faire dans un cadre assez général (sur des variétés de dimension arbitraire), l'étude des bifurcations n'a pu se faire, jusqu'à maintenant, que dans un cadre assez limité : pour les champs de vecteurs du plan avec un

nombre quelconque de paramètres, pour les applications de l'intervalle et du cercle et pour quelques dynamiques particulières (les champs sur le tore, l'application de Hénon, l'attracteur de Lorenz par exemple), qui sont des familles dépendantes de peu de paramètres (1 ou 2 en général).

1.4. Exemples de systèmes dynamiques

(1) Application unimodale. Soit l'application $f_\mu : x \mapsto \mu x(1-x)$ avec $x \in I = [0,1]$. On voit que $f_\mu(I) \subset I$ si et seulement si $\mu \in [0,4]$. Cet intervalle $[0,4]$ est donc l'intervalle dans lequel on choisit le paramètre. Pour $\mu < 1$, l'origine est un point fixe attractant et le bassin d'attraction est l'intervalle I en entier. Pour $\mu = 1$, l'origine devient instable et il bifurque un point fixe stable $x_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$. Quand μ augmente, $f'_\mu(x_\mu) = 2 - \mu$ décroît, passe par 0 puis devient négative. Pour $\mu_1 = 3$, cette dérivée atteint la valeur -1 et le point fixe x_μ passe par une bifurcation de doublement de période (voir l'exemple 6 du paragraphe 5.2) : le point x_μ devient instable, et une orbite 2-périodique stable γ^2_μ bifurque. Pour une valeur $\mu_2 > \mu_1$, cette orbite passe à son tour par une bifurcation de doublement de période : γ^2_μ devient instable, et il bifurque une orbite 4-périodique stable. Ce phénomène de bifurcation de doublement de période se répète indéfiniment à des valeurs μ_i, $i \in \mathbb{N}$, formant une suite croissante s'accumulant sur une valeur μ_∞, appelée valeur de *bifurcation de Feigenbaum* (figure 1.1). Feigenbaum a montré que cette accumulation de bifurcations s'explique dans le cadre de la *théorie de la renormalisation.* Une conséquence remarquable de cette théorie est que la suite (μ_n) est géométrique, c'est-à-dire que $\mu_\infty - \mu_n \sim C\delta^n$, avec $C > 0$ et une constante *universelle* δ, $0 < \delta < 1$. Cela signifie que le phénomène d'accumulation des bifurcations de doublement de période existe pour des familles unimodales beaucoup plus générales que la famille quadratique f_μ, avec *la même constante* δ. Pour la valeur de Feigenbaum μ_∞, l'application f_{μ_∞} possède un attracteur K_F, dit *attracteur de Feigenbaum,* qui est la limite au sens de Hausdorff des orbites stables. En fait, K_F n'est pas un attracteur au sens de la définition 1.4 : en effet, il coexiste avec les orbites périodiques instables γ^n_∞ de f_∞, orbites qui s'accumulent sur lui. Le bassin d'attraction de K_F est le complémentaire de la réunion de ces orbites instables.

Pour $\mu \in]3,4]$, on peut avoir des dynamiques chaotiques plus ou moins compliquées. Ces dynamiques et leurs bifurcations ont fait l'objet d'un très grand nombre d'études qu'il n'est pas question de mentionner dans cet ouvrage. On pourra consulter le livre de Collet et Eckmann [15] pour avoir une idée de l'état du sujet dans les années 1980, le livre de Milnor [47] pour une idée plus récente de l'évolution du sujet dans le domaine complexe : on considère $x, \mu \in \mathbb{C}$, l'ensemble

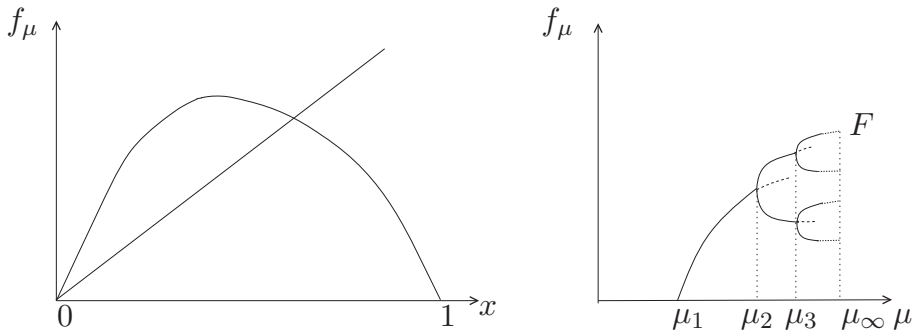


Figure 1.1. Figure de gauche : f_μ pour un $\mu > 1$.

de bifurcation est alors l'*ensemble de Mandelbrot*. Cet ensemble a une géométrie fractale, notion introduite par Mandelbrot [42]. Pour une approche plus savante de ces aspects, aussi bien réels que complexes, on pourra consulter le livre de De Melo et Van Strien [17].

Ces travaux sur l'application unimodale ont permis de dégager et d'étudier, dans un cas d'école, des concepts qui jouent un rôle fondamental pour la théorie générale des systèmes dynamiques : attracteurs (hyperboliques, étranges), renormalisation, géométrie fractale, etc.

Le fait essentiel à retenir est que l'évolution décrite par l'équation unimodale peut être chaotique dès que le paramètre μ est assez grand. Cette propriété de la dynamique discrète est en contraste avec la situation que l'on observe à propos de l'équation unimodale différentielle :

$$\dot{x} = \mu x(1 - x).$$

Pour toute valeur de $\mu > 0$, le flot de l'équation différentielle a un seul point singulier attracteur qui est le point $x = 1$. Le bassin d'attraction de ce point est l'axe $\mathbb{R}^+$ en entier (l'origine est un point singulier instable).

(2) Loi d'attraction universelle de Newton. Cette loi décrit le champ de gravité classique, tel qu'il a été introduit par Newton. Supposons que le système considéré soit formé de n points matériels : $X_1, \dots X_n \in \mathbb{R}^3$, de masse : $m_1, \dots m_n$ respectivement. La loi de Newton est une équation différentielle du second ordre dérivant d'un potentiel particulier. Rappelons qu'une équation différentielle du second ordre, sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, dérive du potentiel V, si V est une fonction différentiable sur U et si l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla V(x).$$

Ici, x est la variable dans U est ∇V est le gradient de V. Dans le cas de la loi de Newton, $x = (X_1, \dots, X_n)$, et l'ouvert de définition est $U = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid X_i \neq X_j \text{ pour } i \neq j\}$ (on écarte les chocs). Le potentiel introduit par Newton s'écrit :

$$V(X_1, \dots, X_n) = G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{||X_i - X_j||},$$

où G est la constante d'attraction universelle. L'équation de Newton prend la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial X_i}(x), \quad i = 1, \dots n,$$

où $\frac{\partial V}{\partial X_i}(x)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ formé des dérivées partielles selon les trois coordonnées de X_i, c'est-à-dire le vecteur projection de $\nabla V(x)$ sur l'espace de ces trois coordonnées. Ici, le gradient $\nabla V(x)$ est relatif à la norme $||X||$ de $\mathbb{R}^{3n}$ définie par $||X||^2 = \sum_{i=1}^n m_i ||X_i||^2$, où $||X_i||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Comme il a été dit dans le chapitre II-1, on étudie une équation différentielle d'ordre 2 définie sur $U \subset \mathbb{R}^N$ en passant dans l'espace $U \times \mathbb{R}^N$ des positions-vitesses (x, y). Dans le cas d'une équation dérivant du potentiel V, le système d'ordre un dans l'espace $U \times \mathbb{R}^N$ prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\nabla V(x) \end{cases}.$$

La principale propriété d'une telle équation est que la fonction

$$E(x, y) = \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + V(x),$$

est constante pour chaque trajectoire. Dans le cas de l'équation de Newton, ce résultat est le théorème de l'énergie cinétique. On doit pondérer le produit scalaire par les masses, et la fonction d'énergie totale E est la somme du potentiel V et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\sum_i m_i \langle Y_i, Y_i \rangle$ avec $Y_i = \dot{X}_i$, la vitesse de X_i. Le mouvement à partir de la condition initiale (x_0, y_0) a donc lieu sur la surface d'énergie constante : $\{E(x, y) = E(x_0, y_0)\}$.

Nous n'en dirons pas plus sur cet exemple qui est assurément le plus ancien et le plus fameux exemple de système différentiel. Rappelons seulement que les propriétés de ce système deviennent beaucoup plus claires dans le cadre du *formalisme hamiltonien*, où l'espace des positions-vitesses est remplacé par l'espace des positions-impulsions, espace de phase traditionnel de la mécanique. Dans ce formalisme, on peut facilement montrer que l'équation, dans l'espace de phase, a d'autres invariants que l'énergie (qui dans le formalisme hamiltonien devient la fonction de Hamilton). En particulier, son flot laisse invariant un volume de l'espace de phase (théorème de Liouville). On trouvera une introduction à l'étude de ces questions, par exemple dans le livre de Arnold [2].

(3) Billard sur des domaines convexes de $\mathbb{R}^2$. On considère une partie B compacte connexe de $\mathbb{R}^2$ bordée par une courbe convexe lisse : c'est notre table de billard. On suppose que l'on a une boule (réduite à un point matériel) qui glisse sans frottement sur B, et subit des chocs élastiques quand elle atteint le bord ∂B. On étudie le mouvement de la boule en considérant ses passages par ∂B.

Précisément, on considère les mouvements qui ne passent que par des chocs transversaux avec ∂B. Ces mouvements sont complètement décrits par la dynamique dite *dynamique du billard*. Cette dynamique est définie sur l'anneau ouvert $A = \partial B \times]0, \pi[$. À chaque $(u, \theta) \in A$ on associe le vecteur unitaire p_θ au point $u \in \partial B$, faisant un angle θ avec le vecteur tangent à ∂B (on a choisi une orientation de ∂B). On lance la boule en u dans la direction orientée p_θ. Elle arrive alors en un point $u_1 \in \partial B$ et rebondit dans la direction p_{θ_1}. La dynamique du billard est l'application $f_B : (u, \theta) \mapsto (u_1, \theta_1)$ (figure 1.2)

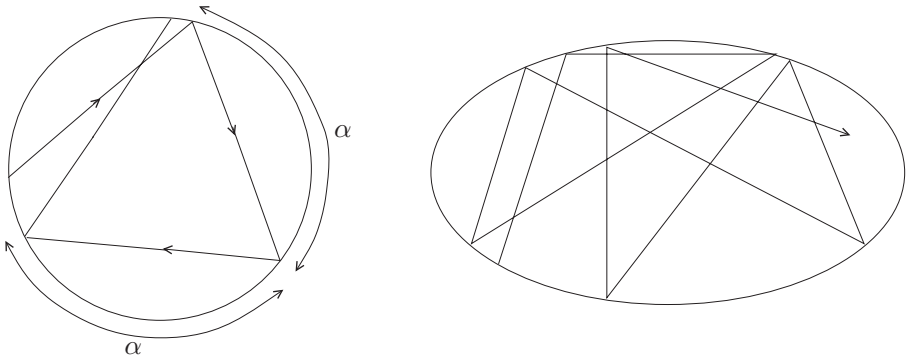


Figure 1.2. Figure de gauche : billard sur un disque (rotation). Figure de droite : billard elliptique (mouvement chaotique).

Si le bord ∂B est strictement convexe, l'application f_B est bien définie sur A. C'est un difféomorphisme de A qui préserve l'aire $du \wedge d\theta$. Dans le cas où B est un disque, il est trivial de vérifier que f_B laisse invariant chaque cercle $\partial B \times \{\theta\}$, et que f_B est une rotation sur chacun de ces cercles (on dit que la dynamique est intégrable). Si on remplace le cercle ∂B par une ellipse, la dynamique est beaucoup plus compliquée. En fait, on a la situation générale d'une dynamique symplectique de l'anneau (symplectique est ici synonyme de « préservant l'aire »), avec un ensemble de Cantor de courbes simples invariantes, données par la théorie KAM, séparant des anneaux contenant des dynamiques chaotiques. Si ∂B est un polyèdre convexe, la dynamique est liée de façon très subtile aux propriétés arithmétiques des angles entre les côtés de ∂B. On trouvera des informations sur la dynamique du billard dans [69].

(4) Pendule avec ou sans frottement.

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0,\ k \geq 0.$$

Dans l'espace de phase de coordonnées $(x = \theta, y = \dot{\theta}) \in S^1 \times \mathbb{R}$, on obtient l'équation d'un champ de vecteur de dimension 2 :

$$X_k : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x - ky \end{cases}. \tag{1.2}$$

Pour $k = 0$, on a un pendule sans frottement. Le système dérive du potentiel $V(x) = \omega^2(1 - \cos x)$ (on a normalisé ce potentiel de façon que $V(0) = 0$). Le potentiel V étant périodique de période 2π, on considère que l'équation (1.2) est définie sur le cylindre ou anneau $S^1 \times \mathbb{R}$, où $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Autrement dit, on identifie les points (x, y) et $(x + 2\pi, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, car deux valeurs de x différents d'un multiple de 2π représentent la même position du pendule. Comme on l'a dit dans l'exemple 2, le champ X_0 laisse donc invariante la fonction $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \omega^2 \cos x$, et les orbites de ce champ sont contenues dans les lignes de niveaux de H. On en déduit immédiatement le portrait de phase de X_0 représenté dans la figure 1.3 (b). On a un centre en $(0, 0)$ entouré par des orbites périodiques remplissant un anneau pincé

$$A = \{H(x, y) \leq 1 + \omega^2\},$$

dont le bord contient le point de selle $(\pi, 0) \sim (-\pi, 0)$ (rappelons que l'on considère A dans l'anneau défini par $(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$). Ces orbites correspondent à des oscillations du pendule. L'extérieur de A est un anneau rempli d'orbites périodiques d'énergie supérieure à $1 + \omega^2$. Ces orbites font des tours entiers. Le bord de A sépare ces deux régimes.

Si $k > 0$, le terme ky représente un frottement opposé au mouvement et proportionel à la vitesse. On a toujours deux points singuliers : un foyer stable en $(0, 0)$ et le point $(\pi, 0)$ qui reste un point de selle. On calcule, par la formule (II-1.1), que : $X_k \cdot H(x, y) = -ky^2$. On en déduit, par le lemme II-1.1, que la fonction H décroît donc strictement le long de chaque orbite différente des deux points singuliers $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$. Il est alors facile de justifier le portrait de phase représenté dans la figure 1.3 (c). On a quatre orbites régulières exceptionnelles : les séparatrices du point $(\pi, 0)$. Deux forment la variété instable W_k^u et tendent vers $(0, 0)$ pour $t \to +\infty$. Les deux autres forment la variété stable W_k^s et tendent vers $(\pi, 0)$ pour $t \to +\infty$. Toutes les autres orbites régulières tendent vers le foyer $(0, 0)$.

Voici une remarque sur la difficulté d'obtenir des résultats quantitatifs, et pas seulement qualitatifs, sur le comportement d'un système dynamique, même sur

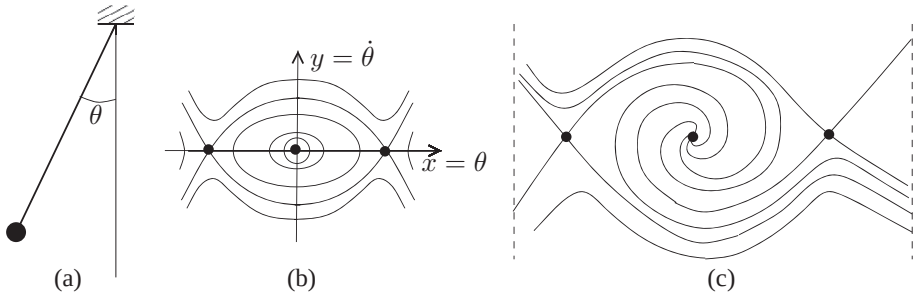


Figure 1.3. (a) le pendule. (b) Portrait de phase pour $k = 0$. (c) Portrait de phase pour $k > 0$. Pour les figures (b) et (c), de gauche à droite, les points singuliers $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$.

un système très simple comme celui-ci. Si on lance le pendule, disons à partir de $x_0 = 0$, avec une grande vitesse $y_0 > 0$, le pendule va faire un certain nombre $N_k(y_0)$ de tours avant d'entrer dans un régime d'oscillations (de plus en plus amorties). Ce nombre $N_k(y_0)$ dépend de la position du point $(0, y_0)$ par rapport aux intersections de la variété stable W^s_k avec l'axe Oy_+. Cette variété W^s_k est analytique, mais ne peut pas être calculée par un algorithme algébrique. En ce sens, trouver le nombre de tours $N_k(y_0)$ en fonction de la vitesse initiale y_0, est un problème « indécidable ».

(5) Compétition d'espèces. On considère deux espèces en compétition (par exemple pour des ressources) dans un même milieu. Les variables x, y représentent les quantités de chaque espèce. Évidemment, on doit se restreindre au premier quadrant $Q = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Pour modéliser l'évolution, Volterra a introduit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x(1 - ax - by) \\ \dot{y} = y(1 - a'x - b'y) \end{cases}. \tag{1.3}$$

Tous les paramètres sont positifs. Le paramètre δ mesure la vitalité relative des espèces. Pour $b = a' = 0$, on a des évolutions indépendantes, chacune des espèces étant régie par une équation différentielle logistique. Les coefficients b, a' sont des termes de couplage, qui ont pour signification que chaque espèce a une influence négative sur l'autre. On suppose que les paramètres sont choisis génériquement (cette notion sera expliquée dans le chapitre 2).

On suppose par exemple la condition générique $\Delta = ab' - ba' \neq 0$ (dans le cas contraire, on aurait une droite de points singuliers).

Sous cette condition, le système (1.3) admet 4 points singuliers :

1. L'origine $A = (0, 0)$ est un point hyperbolique singulier instable (de valeurs propres 1 et δ).
2. Les deux points $B = (\frac{1}{a}, 0)$ et $C = (0, \frac{1}{b'})$ sont stables en restriction aux axes Ox et Oy respectivement.
3. Le point $D = (\frac{b'-b}{\Delta}, \frac{a-a'}{\Delta})$. Pour que ce point soit localisé dans Q il est nécessaire que ses deux coordonnées soient positives. Cette condition définit un ouvert de l'espace des paramètres.

Il est clair que si $(x, y) \in Q$ a une norme assez grande, le produit scalaire du champ $X(x, y)$, défini par (1.3), avec le champ radial $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, est strictement négatif. Il en résulte que toutes les trajectoires entrent dans une région triangulaire $Q_\rho = \{(x, y) \in Q \mid x + y \leq \rho\}$. On dit que Q_ρ est un ensemble absorbant.

Il est très facile de calculer en fonction des paramètres, les valeurs propres de la partie linéaire de l'équation différentielle (1.3) aux différents points singuliers. Génériquement ces points sont hyperboliques, et l'on peut déterminer le portrait de phase local à l'aide du théorème 3.9 de Hartmann-Grobmann. Il est d'autre part connu (mais pas facile à démontrer) que l'équation différentielle (1.3) n'a pas d'orbite périodique. En utilisant le théorème II-5.2 de Poincaré-Bendixson, on peut alors déduire des résultats locaux au voisinage des points singuliers et, du fait que Q_R est absorbant, les différents portraits de phase génériques possibles. Ces portraits de phase sont structurellement stables et dépendent de conditions ouvertes sur les paramètres, très faciles à expliciter (c'est-à-dire des conditions définies par l'appartenance du paramètre à des ouverts de l'espace des paramètres). Nous avons représenté les quatre portraits de phase possibles dans la figure 1.4.

Les portraits de phase (a) et (b) sont des cas d'*exclusion* d'une des deux espèces, dès que l'autre espèce est présente initialement (même en petite quantité). Dans le portrait (c) le point D est un point de selle. La variété stable W^s de ce point (voir chapitre 3) est une courbe qui sépare Q en deux régions, qui sont les bassins d'attractions $\mathcal{B}_B$ et $\mathcal{B}_C$ de B et C respectivement. Dans ce cas, une seule espèce survit selon la condition initiale. On dit que l'on a une *compétition forte*. Dans le cas (d) le point D est un point stable dont le bassin d'attraction est l'intérieur de Q en entier. On a *coexistence* des deux espèces. On dit aussi que l'on a une *compétition faible.*

1.5. Plan du tome 2

Outre la présente introduction, le tome 2 comprend les chapitres suivants :

Chapitre 2 : Généricité et transversalité. Il est clair que pour servir de modèle, il est nécessaire qu'un système dynamique ne soit pas trop dégénéré. Les

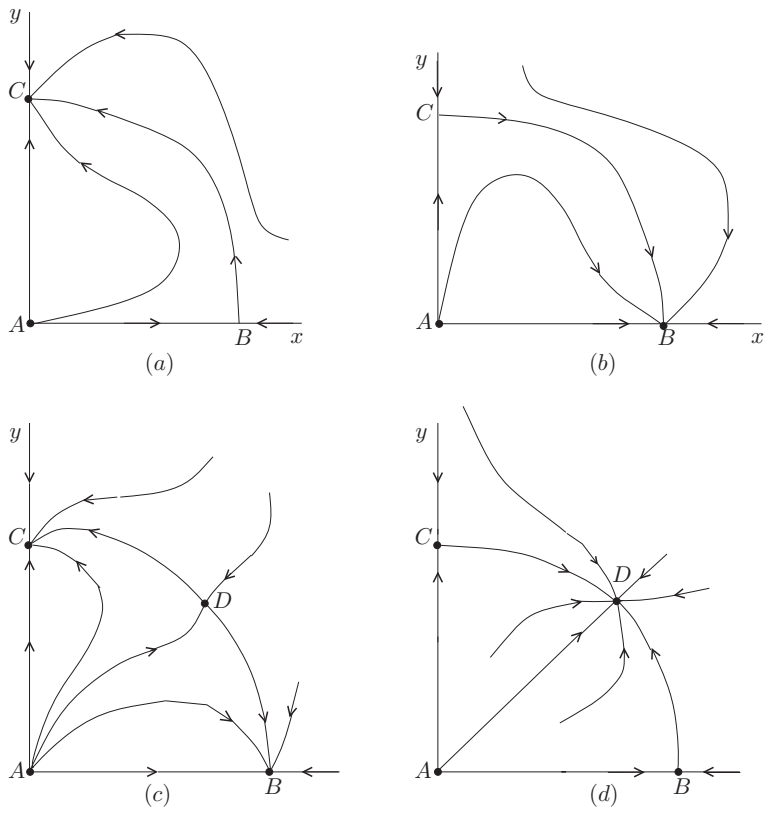


Figure 1.4. (a), (b) Exclusion ; (c) compétition forte ; (d) coexistence.

bons systèmes devront d'autre part être assez généraux. Chaque type de système dynamique considéré sur une variété M correspond à un espace fonctionnel précis : l'espace des applications $\mathcal{C}^k(M, M)$, des difféomorphismes $\mathcal{D}^k(M)$, des champs de vecteurs $\chi^k(M)$, où k, $0 \leq k \leq +\infty$, est la classe de différentiabilité. Pour pouvoir comparer les systèmes dynamiques et donner un sens précis à la vague idée de « bons » systèmes, il est tout d'abord nécessaire d'introduire une topologie sur l'espace fonctionnel considéré. On utilise la topologie de convergenge uniforme en classe $\mathcal{C}^k$, qui permettra de préciser la « force » des perturbations considérées : dire que deux systèmes sont $\mathcal{C}^k$-proches, signifie que l'on contrôle toutes les dérivées partielles locales jusqu'à l'ordre k. Selon le type de propriété étudiée, on considérera des valeurs de k plus ou moins grandes.

Un système assez général pourrait être un système appartenant à un ensemble ouvert dense de l'espace fonctionnel (ouvert pour avoir une stabilité de la propriété, et dense pour que la propriété ait un caractère général). Cependant, il est

apparu assez vite que l'on devrait considérer des propriétés définies par une infinité dénombrable de conditions : par exemple, pour une application, la propriété d'avoir toutes ses orbites périodiques hyperboliques (au sens qui sera défini dans le chapitre 3). Or, il y a, *a priori*, une infinité dénombrable de périodes possibles. C'est cette remarque qui a conduit René Thom à définir les bonnes propriétés (il a introduit à leur sujet la terminologie de « propriété générique »), comme étant l'appartenance à une intersection dénombrable d'ouverts denses de l'espace fonctionnel. Heureusement, ces espaces sont tous des espaces de Baire pour lesquels une telle intersection, appelée ensemble résiduel, est toujours dense. Cela rend très opératoire la notion de généricité de Thom : par exemple, une intersection dénombrable de propriétés génériques est encore une propriété générique. Cette notion de généricité sera introduite dans le chapitre 2.

Dans le même temps qu'il introduisait la notion de propriété générique, Thom a introduit un outil géométrique remarquable pour construire des propriétés génériques : la transversalité. Nous présenterons cet outil, et démontrerons le théorème de transversalité qui lui est associé.

Chapitre 3 : Étude locale des singularités hyperboliques. Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement local des difféomorphismes et des champs de vecteurs, au voisinage des points fixes ou singuliers les moins dégénérés (les points hyperboliques). Nous étudierons parallèlement le comportement local des difféomorphismes et des champs de vecteurs au voisinage de leurs orbites périodiques hyperboliques.

Le résultat le plus important du chapitre est qu'un difféomorphisme est équivalent à sa partie linéaire au voisinage d'un point fixe hyperbolique. De même, un champ de vecteurs est conjugué à sa partie linéaire au voisinage d'un point singulier. Comme les dynamiques linéaires sont très faciles à classifier et à étudier, ce résultat de linéarisation, dû à Hartmann et Grobman, permet de comprendre complètement la dynamique locale au voisinage d'une singularité hyperbolique. Ce résultat de linéarisation sera obtenu comme une conséquence de l'existence de variétés invariantes stables et instables, et aussi de feuilletages invariants locaux stables et instables. Ces résultats géométriques ont d'ailleurs un grand intérêt par eux-mêmes.

Chapitre 4 : Systèmes dynamiques structurellement stables. Comme l'avait fait Smale, on peut identifier les bons systèmes avec les systèmes structurellement stables. Nous avons expliqué plus haut pourquoi ces systèmes sont les seuls ayant un réel intérêt pour la modélisation. En effet, ils restent inchangés à équivalence près par de petites perturbations.

Nous verrons tout d'abord que le théorème de Hartmann-Grobman, joint à la classification des systèmes linéaires, peut s'interpréter comme un résultat de

stabilité structurelle locale. Nous considérerons ensuite les systèmes de Morse-Smale. Ces systèmes structurellement stables peuvent se comprendre comme les systèmes pour lesquels la stabilité structurelle locale des singularités (points singuliers et orbites périodiques de champs, orbites périodiques de difféomorphismes) implique la stabilité structurelle globale.

Les champs de vecteurs de Morse-Smale d'une surface compacte M^2 sont les seuls champs structurellement stables. Il en résulte que l'ouvert de stabilité structurelle dans $\chi^k(M^2)$, pour $k \geq 1$, est un ouvert dense. Ce résultat n'est plus vrai pour les champs en dimension supérieure ou égale à trois (et aussi pour les difféomorphismes en dimension supérieure ou égale à deux, et les applications générales en dimension supérieure ou égale à un). Dans cette situation générale, les dynamiques structurellement stables peuvent avoir un comportement compliqué. Nous décrirons l'exemple célèbre du fer à cheval de Smale, qui permet de construire des dynamiques à la fois compliquées et structurellement stables.

Le fer à cheval est l'exemple le plus simple d'ensemble hyperbolique non trivial, c'est-à-dire ne se réduisant pas à une singularité hyperbolique isolée. Nous introduirons ce concept important, dû à Smale. C'est à propos de ces exemples de dynamiques hyperboliques, qui manifestent ce que l'on peut désigner par « l'ordre dans le chaos », que l'on peut introduire les notions importantes pour la description du comportement dynamique : dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales, entropie topologique, objets dynamiques à géométrie fractale.

Chapitre 5 : Les bases de la théorie des bifurcations. Une bifurcation est un changement du type dynamique (à équivalence près) dans une famille à paramètres de systèmes dynamiques. On commence par évoquer la théorie des catastrophes de Thom, qui est l'archétype des théories de bifurcations, et qui a une grande utilité pour la théorie des familles de champs de vecteurs en dimension deux par exemple. On donne ensuite quelques définitions de base concernant les familles à paramètres : codimension de singularité, famille induite, famille verselle, topologies sur les espaces de familles. Puis nous décrirons quelques résultats classiques relatifs aux champs de vecteurs en dimension deux : les bifurcations de type selle nœud et les bifurcations de type Hopf-Takens. Dans ce chapitre, nous introduirons aussi deux outils techniques indispensables à l'étude des bifurcations : la mise en forme normale et le résultat de réduction (de la dynamique) à une variété centrale.

Chapitre 6 : Compléments sur la théorie des bifurcations. Dans ce chapitre, on développe quelques outils techniques plus récents, indispensables pour une étude plus avancée des bifurcations : la désingularisation par éclatement des singularités et des déploiements de champs, ainsi que le développement asymptotique de l'application de retour au voisinage d'un polycycle. Le chapitre se poursuit

par l'étude des bifurcations globales sur la sphère S^2, qui se traduit par la question de la cyclicité finie et par l'évocation du seizième problème de Hilbert, avec le rôle joué par les intégrales abéliennes dans l'étude des bifurcations de champs de vecteurs. On conclut par un exemple illustrant la difficulté de développer une théorie de la bifurcation globale et non locale, même dans le cas le plus simple des champs sur la sphère S^2.

Chapitre 7 : Système de Lorenz. C'est une équation différentielle en dimension 3 introduite comme un modèle très simplifié pour des équations de rouleaux de convection (instabilité de Rayleigh-Bénard) existant dans des équations d'atmosphère :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= P_r(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y\,. \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ce modèle a une grande importance scientifique, dans le domaine de la météorologie en particulier, car, même si le modèle de Lorenz n'est qu'une idéalisation très simplifiée de la réalité météorologique, il a été le premier exemple montrant l'impossibilité théorique de prédire le temps sur quelques jours (nous restons volontairement vagues !). Dans ce chapitre, nous donnons aussi quelques éléments de la justification de ce modèle à partir de la physique.

On montre à la figure 1.5 l'« attracteur étrange » de Lorenz (les célèbres « ailes de papillon ») pouvant être observé dans des simulations numériques de ce système pour des valeurs convenables des paramètres.

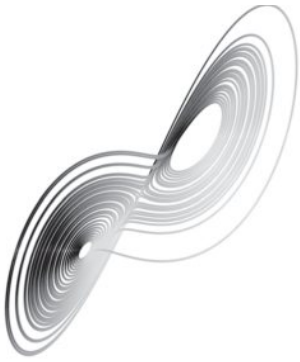


Figure 1.5. L'attracteur de Lorenz. Figure publiée grâce à la courtoisie de Jean-François Colonna du CMAP (Centre de mathématiques appliquées) de l'École polytechnique.

2

GÉNÉRICITÉ ET TRANSVERSALITÉ

Ce chapitre va principalement présenter les idées de René Thom sur la généricité. La notion de transversalité est abordée, elle est à la base de la définition de la généricité.

2.1. Germe

Dans ce chapitre, nous allons considérer des propriétés locales sur une variété. Il est très commode de pouvoir utiliser la notion de *germe* pour parler de telles propriétés. On peut parler de germe pour tout objet définissable de façon localisable dans une variété : sous-ensembles (et donc sous-variétés par exemple), fonctions, applications, sections de fibrés différentiels (notion que nous définirons plus loin dans ce chapitre). Considérons un tel objet $\mathcal{V}$ défini localement au voisinage d'un point $x \in M$ (c'est-à-dire sur un voisinage W_0 de x et donc sur tout sous-voisinage). Parmi de tels objets localement définis, on introduit une relation d'équivalence : $\mathcal{V}_1$ défini sur le voisinage W_1 est équivalent à $\mathcal{V}_2$ défini sur le voisinage W_2, si et seulement si $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ coïncident sur $W_1 \cap W_2$. Un germe d'objet en x, noté $(\mathcal{V}, x)$, est une classe d'équivalence d'objets localement définis. Un *représentant* du germe est tout simplement le choix d'un élément dans la classe d'équivalence.

Une propriété d'un germe en x est une propriété qui sera vérifiée pour tous les représentants sur des voisinages assez petits. Autrement dit, c'est une propriété qui doit être vérifiée au moins sur un voisinage de x (qui peut être arbitrairement petit), et qui est héritée sur tous les sous-voisinages de ce point. Le mot germe sera utilisé chaque fois que l'on veut parler d'une propriété locale (valable pour des voisinages arbitrairement petits), et que l'on ne veut pas se préoccuper de la

taille du voisinage. Il revient au même de dire *que la propriété est vérifiée sur un voisinage arbitrairement petit.*

Pour fixer les idées, considérons le cas des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en un point x d'une variété M. Chaque germe (f, x) est défini par un représentant, aussi noté f, qui est une fonction définie sur un voisinage (arbitraire) W de x. On voit que la valeur $f(x)$ ne dépend que du germe : c'est typiquement une propriété du germe.

La somme, le produit de deux fonctions, l'inverse $1/f$ si $f(x) \neq 0$ pour tout x, sont des notions *qui passent aux germes* : par exemple, on voit que l'on peut définir la somme de deux germes comme le germe de la somme (car ce germe est bien défini). Il en résulte que l'ensemble des germes de fonctions en x a une structure d'anneau. Cet anneau est noté $\mathcal{O}_x^\infty$.

Si $M = R^p$, il est clair que tout polynôme de Taylor d'ordre $k \in \mathbb{N}$, et même la série de Taylor en x, sont attachés au germe (f, x). Nous verrons plus loin que ces notions donnent lieu à la notion intrinsèque de *k-jet* d'un germe de fonction en un point d'une variété, notion qui est un ingrédient essentiel pour les notions de transversalité et de généricité que nous allons développer dans ce chapitre.

2.2. Topologie sur les espaces fonctionnels

2.2.1. Convergence de classe $\mathcal{C}^k$ sur les ouverts euclidiens

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k, p \in \mathbb{N}$. On désigne par $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui sont *bornées* en valeur absolue, ainsi que toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k. Pour tout $f \in \mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$, on peut définir :

$$\| f \|^k_U = \mathrm{Sup} \left\{ \left| \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x) \right| \quad | \ x \in U, \mid j \mid \leq k \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que $||f||^k_U$ est une norme sur $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$. *Dorénavant on désignera par $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$ cet espace normé, de norme $|| \cdot ||^k_U$.* On peut résumer le résultat classique de convergence en classe $\mathcal{C}^k$ par le résultat suivant :

Théorème 2.1. *L'espace $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$ muni de la norme $|| \cdot ||^k_U$ est un espace de Banach (rappelons qu'un espace normé est dit de Banach s'il est complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy y converge).*

Ce théorème, ainsi que les conséquences que l'on va donner ci-après, sont très classiques, mais malheureusement difficilement accessibles (voir [7], paragraphe 1, n°5, ou bien [21] par exemple, ou bien [13, 55] pour des preuves partielles plus élémentaires). Aussi nous allons en donner des preuves succinctes.

Par récurrence sur les dérivées partielles successives, on réduit la preuve à démontrer le résultat suivant pour une seule dérivée partielle d'ordre un (dérivation partielle d'une suite de fonctions terme à terme) :

Proposition 2.1. *Supposons choisi un opérateur de dérivation partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, que nous noterons ∂f. Soit $(f_m)_m$ une suite de $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$ telle que, pour tout m, la fonction ∂f_m existe et appartienne à $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$. Supposons que les deux suites $(f_m)_m$ et $(\partial f_m)_m$ soient des suites de Cauchy de $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$. Alors :*

1. *La suite $(f_m)_m$ converge vers une fonction f dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$.*
2. *La dérivée partielle ∂f existe et appartient à $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$. De plus, cette fonction est la limite dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$ de la suite $(\partial f_m)_m$.*

Preuve du point (1). Par hypothèse, la suite numérique $(f_m)_m$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$ et donc, pour tout $x \in U$, $(f_m(x))_m$ est une suite numérique de Cauchy. Soit $f(x) = \lim_{m\to+\infty} f_m(x)$ ($f(x)$ est la limite simple de la suite $(f_m(x))_m$). Nous allons montrer que la fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$. Tout d'abord, f est bornée. En effet, comme la suite $(f_m)_m$ est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m(\varepsilon)$ tel que $m, m' \geq m(\varepsilon)$ implique que $||f_m - f_{m'}||^0_U < \varepsilon$. En faisant tendre m' vers $+\infty$, on obtient :

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{2.1}$$

pour tout $x \in U$. Comme f_m est bornée, il suit de (2.1) que f est aussi bornée. Montrons ensuite que f est continue. Fixons une valeur m comme dans (2.1) et un $x_0 \in U$. Comme f_m est continue, il existe un voisinage V de x_0 dans U tel que $x \in V$ implique $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Il suit de cette inégalité et de (2.1) que, pour tout $x \in V$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

ce qui donne la continuité de f en x_0, point quelconque dans U. Enfin, il suit de (2.1) que $(f_m)_m \to f$ dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$. ■

Preuve du point (2). Comme aussi, par hypothèse, $(\partial f_m)_m$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$, on répète le point (1) pour démontrer que la suite $(\partial f_m)_m$ converge dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(U,\mathbb{R})$ vers une fonction f^1 continue. Pour démontrer le point (2), il suffit donc de prouver que la fonction ∂f existe et est égale à f^1. Soit e le vecteur unitaire de la dérivée partielle ∂, et soit $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit pour que le segment $[x, x+te]$ soit aussi contenu dans U. Par le théorème des accroissements finis (voir chapitre I-1), on sait que, pour tout m, il existe $\tau_m(t) \in [0,1]$ tel que :

$$f_m(x+te) - f_m(x) = \partial f_m(x + \tau_m(t)te)t. \tag{2.2}$$

Fixons t. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $(m_n)_n$ telle que la suite $(\tau_{m_n}(t))_n$ converge vers une valeur $\tau(t) \in [0,1]$. Passant maintenant à la limite de (2.2) pour la sous-suite $(m_n)_n$, on obtient, compte tenu de la convergence de la suite $(\partial f_{m_n})_n$ vers f^1 :

$$f(x+te) - f(x) = f^1(x+\tau(t)te)t.$$

Le point x étant fixé, faisons tendre t vers 0. Comme f^1 est continue, on obtient :

$$\partial f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} f^1(x+\tau(t)te) = f^1(x),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

On désigne maintenant par $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose pour commencer que k est fini.

Soit $f \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$. Pour tout compact K contenu dans U, on pose :

$$\| f \|_K^k = \mathrm{Sup}\left\{ \left| \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x) \right| \quad | \ x \in K, \ | j | \leq k \right\}$$

où j est un multi-indice, à savoir : $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $| j | = j_1 + \ldots + j_n$, et $\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x)$.

L'application $f \mapsto \| f \|_K^k$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel fonctionel $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$. Rappelons qu'une semi-norme $p : E \mapsto \mathbb{R}^+$, sur un espace vectoriel E, est définie de façon analogue à une norme, à la seule différence que $p(u) = 0$ n'implique pas que $u = 0$. Ici, par exemple, l'annulation de $\| f \|_K^k$, n'entraîne pas la nullité de f que sur K.

Si un espace vectoriel est muni d'une famille de semi-normes p_i avec $i \in I$, où I est un ensemble quelconque d'indices, un système fondamental de voisinages de l'origine pour *la topologie définie par ces semi-normes* est constitué par les *semi-boules* ouvertes : $B_{i,\varepsilon}(f) = \{p_i(f) < \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i \in I$. Autrement dit, *la topologie définie par ces semi-normes* a pour base d'ouverts les *semi-boules* ouvertes : $B_{i,\varepsilon}(f) = \{p_i(f) < \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i \in I$. Dans cette topologie, une suite $(u_s)_s$ de E converge vers $v \in E$ si, pour tout $i \in I$, on a $p_i(u_s - v) \to 0$ si $s \to +\infty$. *On n'exige aucune uniformité de cette convergence, en fonction de l'indice i.*

Revenons à l'espace $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$. On appelle *topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U en classe $\mathcal{C}^k$*, ou tout simplement *la topologie (de classe) $\mathcal{C}^k$*, la topologie définie sur $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ par la famille de semi-normes $\| f \|_K^k$ (l'ensemble I

est l'ensemble des parties compactes K de U). Dorénavant, le symbole $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel topologique des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ avec la topologie $\mathcal{C}^k$. *Explicitement*, une suite de fonctions $(f_s)_s$ de $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ converge vers une fonction $g \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ si, pour tout compact K, et tout multi-indice j, avec $|j| \leq k$, on a $\frac{\partial^{|j|} f_s}{\partial x^j}(x) \to \frac{\partial^{|j|} g}{\partial x^j}(x)$ *uniformément en* $x \in K$, c'est-à-dire de façon que :

$$\sup \left\{ \left| \frac{\partial^{|j|}(f_s - g)}{\partial x^j}(x) \right| \;\middle|\; x \in K \right\} \to 0 \quad \text{pour} \quad s \to +\infty.$$

Définition 2.1. On dit que la topologie définie par la famille de semi-normes $\{p_i\}_{i\in I}$ est séparée si la propriété $p_i(u) = 0$, pour tout $i \in I$, implique $u = 0$.

L'espace $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ est clairement séparé car, si une fonction est nulle sur chaque compact de U, elle est nulle sur U.

Supposons que pour un espace vectoriel E, dont la topologie est définie par une famille de semi-normes p_i, $i \in I$, on puisse trouver un sous-ensemble d'indices $J \subset I$ tel que, pour tout $i \in I$, il existe un $j(i) \in J$ avec $p_{j(i)}(u) \geq p_i(u)$ pour tout $u \in E$, alors la topologie de E est définie par les seules semi-normes p_j avec $j \in J$. Cette remarque est particulièrement intéressante si l'on peut trouver un tel sous-ensemble J dénombrable. Supposons que cela soit le cas : la topologie de E est alors définie par des semi-normes p_s avec $s \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on obtient la même topologie en remplaçant chaque p_s par la semi-norme $\mathrm{Sup}_{i\leq s} p_i$. Ces nouvelles semi-normes, que l'on désignera encore par p_s, $s \in \mathbb{N}$, forment une *suite croissante* : $p_{s+1} \geq p_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. C'est ce que nous supposerons dorénavant. On définit alors une fonction $\delta : E \mapsto \mathbb{R}^+$ par :

$$\delta(u) = \sum_s 2^{-s} \frac{p_s(u)}{1 + p_s(u)}.$$

Remarquez que la série ci-dessus converge car, pour tout u, on a $0 \leq \frac{p_s(u)}{1+p_s(u)} \leq 1$. L'intérêt de cette fonction est qu'elle permet de définir la topologie de E :

Lemme 2.1. *La topologie définie par les semi-normes p_s sur E est engendrée par la base d'ouverts : $\Delta_\varepsilon(u) = \{v \in E | \delta(v-u) < \varepsilon\}$, pour tout $u \in E$ et tout $\varepsilon > 0$. En particulier, une suite $(u_s)_s$ converge vers v dans la topologie définie par les semi-normes si et seulement si $\delta(u_s - v) \to 0$ pour $s \to +\infty$.*

Si la topologie est séparée, alors $\delta(u-v)$ est une distance sur E. En conséquence, un espace vectoriel topologique, dont la topologie est séparée et définie par une infinité dénombrable de semi-normes, est un espace métrisable.

Démonstration. Soit $u \in E$ un élément quelconque. Comme la fonction homographique $h(\eta) = \frac{\eta}{1+\eta}$ est croissante ainsi que la suite des semi-normes, on a $\frac{p_i(u)}{1+p_i(u)} \leq \frac{p_s(u)}{1+p_s(u)}$ pour $i \leq s$. En écrivant la somme $\delta(u)$ sous la forme :

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{s} 2^{-i} \frac{p_i(u)}{1+p_i(u)} + \sum_{j=s+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)},$$

on obtient alors l'estimation :

$$\delta(u) \leq 2 \frac{p_s(u)}{1+p_s(u)} + 2^{-s}. \tag{2.3}$$

Inversement, on a trivialement que :

$$\frac{p_s(u)}{1+p_s(u)} \leq 2^s \delta(u). \tag{2.4}$$

Les inégalités (2.3) et (2.4) sont vérifiées pour tout $u \in E$ et tout $s \in \mathbb{N}$. En tenant compte que h est un homéomorphisme croissant de $[0,\infty)$ sur $[0,1)$, ces inégalités impliquent la première partie du lemme, à savoir que la topologie des semi-normes est définie par la base d'ouverts $\{\Delta_\varepsilon(u)\}_{u,\varepsilon}$. Clairement, $\delta(u-v) = \delta(v-u)$ pour tout $u, v \in E$. Comme la fonction homographique h est croissante et vérifie l'inégalité $h(\alpha+\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$, il suit de l'inégalité triangulaire vérifiée par chaque semi-norme, que $\delta(u+v) \leq \delta(u) + \delta(v)$, d'où il découle l'inégalité triangulaire pour la fonction $\delta(u-v)$. Enfin, si $\delta(u-v) = 0$, on a $p_s(u-v) = 0$ pour tout s (car la série de $\delta(u-v)$ est à termes positifs et que la fonction h est un homéomorphisme croissant de $[0,\infty)$ sur $[0,1)$). Comme la topologie définie par les p_s est séparée, cela implique que $u = v$. En rassemblant ces différentes propriétés de δ, on voit que $\delta(u-v)$ est une distance sur E. ∎

Remarque 2.1. Comme l'application homographique $\eta \mapsto \frac{\eta}{1+\eta}$ n'est pas linéaire, l'application $u \mapsto \delta(u)$ n'est pas une norme : elle ne vérifie pas la formule d'homogénéité $\delta(\lambda u) = |\lambda| \delta(u)$. Pour obtenir une norme, on pourrait être tenté d'utiliser tout simplement la formule linéaire : $\sum_s 2^{-s} p_s(u)$, mais cette série ne converge pas en général (on a aucun contrôle *a priori* sur la valeur des semi-normes $p_n(u)$). En conséquence, la topologie définie par une infinité de semi-normes n'est, en général, pas celle d'un espace vectoriel normé (sauf si l'on peut se ramener à un nombre fini de semi-normes : on peut alors remplacer cet ensemble fini de semi-normes par leur borne supérieure).

On pourrait remplacer l'application homographique par n'importe quelle fonction continue croissante : $\varphi : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$, bornée, telle que $\varphi(0) = 0$ et vérifiant $\varphi(\alpha+\beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in [0,\infty)$.

***Définition* 2.2.** Soit E un espace vectoriel topologique dont la topologie est séparée et définie par une infinité dénombrable de semi-normes. Si la métrique associée $\delta(u-v)$ est complète, on dit que E est un *espace de Fréchet.* Autrement dit, un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique métrisable et complet (métrisable, car une métrique définissant la topologie n'est pas définie de façon unique).

Les espaces de Banach sont de façon triviale des espaces de Fréchet particuliers, avec une seule semi-norme qui doit être nécessairement une norme (voir par exemple, pour ces définitions et propriétés, [20] pp. 62-63).

***Remarque* 2.2.** Rappelons qu'un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy y est convergente. Une suite $(x_s)_s$ est de Cauchy si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un $s(\varepsilon)$ tel que si : $p,q\geq s(\varepsilon)$ on a $d(x_p,x_q)<\varepsilon$. Une définition équivalente de la propriété d'être complet, formulation qui nous sera très utile dans la suite, est la suivante ([22], p. 74). Soit $\{B_s\}_s$ une suite de boules *fermées,* emboîtées ($B_{s+1}\subset B_s$ pour tout $s\in\mathbb{N}$), dont le rayon tend vers 0 avec s, alors ces boules s'intersectent en un point et un seul : il existe $x\in X$ tel que $\cap_s B_s=\{x\}$.

***Proposition* 2.2.** *$\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Choisissons une suite croissante $\{K_s\}_s$ de compacts de U, telle que $U=\bigcup_s \mathrm{int}(K_s)$ (ici $\mathrm{int}(K_s)$ désigne l'intérieur de K_s). Pour construire une telle suite, on considère par exemple l'ensemble de toutes les boules fermées contenues dans U avec un rayon rationnel et un centre de coordonnées rationnelles. Cet ensemble est dénombrable et on peut numéroter ses éléments $B_1,\ldots,B_l,\ldots$ avec $l\in\mathbb{N}$; on peut alors définir K_s par $K_s=\bigcup_{i\leq s} B_i$.

On pose $p_s(f)=\parallel f\parallel^k_{K_s}$. Comme tout compact de U est contenu dans l'un des K_s, la topologie de $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ est définie par la suite dénombrable des p_s. Remarquez que cette suite de semi-normes est croissante.

Considérons une suite de Cauchy $(f_m)_m$ dans $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ pour la distance définie par δ. Soit $x\in U$ un point quelconque. Comme $x\in K_s$ pour un certain s, la suite numérique $(f_m(x))_m$ est une suite de Cauchy et donc converge vers une valeur unique $f(x)$. On définit de cette façon une fonction unique f sur U qui est la limite simple de la suite $(f_m)_m$. *Nous allons montrer que $f\in\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ et que la suite $(f_m)_m$ converge vers f en classe $\mathcal{C}^k$. Comme $(f_m)_m$ est une suite de Cauchy quelconque, on aura ainsi montré que $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet.*

Fixons un compact $K_{\tilde{s}}$ et un multi-indice j, avec $|j|\leq k$. Par définition de la métrique δ sur $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$, la suite $\frac{\partial^{|j|}f_m}{\partial x^j}(x)$ est de Cauchy dans l'espace de

Banach $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(\text{int}(K_{\tilde{s}}), \mathbb{R})$. Comme la suite $(f_m)_m$ converge simplement vers f sur cet ouvert, il suit du théorème 2.1 ci-dessus que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\text{int}(K_{\tilde{s}})$, et que la suite $(f_m)_m$ converge uniformément en classe $\mathcal{C}^k$ sur $\text{int}(K_{\tilde{s}})$ vers la fonction f. Maintenant, comme $U = \bigcup_{\tilde{s}} \text{int}(K_{\tilde{s}})$, on a $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$. D'autre part, pour chaque compact K_s on peut trouver un autre compact $K_{\tilde{s}}$ avec $K_s \subset \text{int}(K_{\tilde{s}})$. Il en résulte que la suite $(f_m)_m$ converge vers la fonction f sur chaque compact K_s en classe $\mathcal{C}^k$. ■

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ des applications $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^p$, pour un entier p quelconque. On peut identifier cet espace avec le produit :

$$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p) = \underbrace{\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) \times \ldots \times \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})}_{\text{p fois}},$$

où l'identification est donnée par $f \mapsto (f_1, \ldots, f_p)$.

On définit la topologie $\mathcal{C}^k$ de $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ comme la topologie produit : un voisinage V de $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ est donné par un produit $V = V_1 \times \ldots \times V_p$, où V_1 est un voisinage de $f_1, \ldots, V_p$ est un voisinage de f_p. Autrement dit, une suite d'applications $(f^m)_m$ converge en classe $\mathcal{C}^k$ vers f si et seulement si, pour chaque $i = 1, \ldots, p$, la suite des fonctions composantes $(f_i^m)_m$ converge en classe $\mathcal{C}^k$ vers la composante f_i de l'application f.

La topologie $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ est définie par l'infinité dénombrable des semi-normes $||f_i||^k_{K_s}$, où $i = 1, \ldots, p$ et $(K_s)_s$, $s \in \mathbb{N}$ est une suite croissante de compacts de U telle que $\bigcup_s K_s = U$. L'espace $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ avec cette topologie est clairement un espace de Fréchet.

On peut finalement considérer l'espace $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p)$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, de U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. La topologie $\mathcal{C}^\infty$ sur cet espace est définie par les semi-normes $||f_i||^k_K$ où $i = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{N}$, et K est un compact quelconque de U. Autrement dit, une suite d'applications $(f^m)_m$ converge en classe $\mathcal{C}^\infty$ vers f si et seulement si, pour chaque $i = 1, \ldots, p$ et pour chaque multi-indice j, la suite des dérivées partielles $(\frac{\partial^{|j|} f_i^m}{\partial x_j})_m$ converge vers la dérivée partielle $\frac{\partial^{|j|} f_i}{\partial x_j}$, uniformément sur tout compact K de U. On peut, comme plus haut, se restreindre à une suite croissante $(K_s)_s, s \in \mathbb{N}$, de compacts de U, telle que $\bigcup_s \text{Int}(K_s) = U$. Il en résulte que l'espace $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p)$ avec la topologie $\mathcal{C}^\infty$ est un espace de Fréchet.

Soit maintenant $\chi^k(U)$ l'espace des champs de vecteurs $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Cet espace s'identifie en tant qu'espace fonctionnel à l'espace $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ de la façon habituelle, le champ de vecteurs : $\sum_{i=1}^{i=n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ étant identifié à l'application : $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$. On met sur l'espace $\chi^k(U)$ la topologie correspondante à cette identification.

2.2.2. Généralisation aux variétés

Soit maintenant V *une variété quelconque* de dimension n que l'on supposera à base dénombrable et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Comme une variété est localement équivalente à $\mathbb{R}^n$, il est facile de définir une topologie $\mathcal{C}^k$ sur l'espace $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur V. Pour cela, en utilisant le fait que V est à base dénombrable, on choisit une suite dénombrable de compacts $(K_s), s \in \mathbb{N}$, telle que chaque (K_s) soit *contenu dans le domaine* U_s *d'une carte* (U_s, φ_s) de V, et que $V = \bigcup_s \mathrm{Int}(K_s)$ (remarquez que, *a fortiori*, les U_s forment un recouvrement ouvert de V et que, pour tout $s, \widetilde{K_s} = \varphi^{-1}(K_s)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$). Chaque compact de V est contenu dans une réunion finie de K_s. Si $f \in \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \leq k$, on considère la semi-norme définie par $p_{s\ell}(f) = \| f \circ \varphi_s^{-1} \|^{\ell}_{\widetilde{K}_s}$. La topologie $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$ est la topologie définie par ces semi-normes. Cette topologie est indépendante du choix des K_s et des cartes (U_s, φ_s). Elle donne à $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$ une structure d'espace de Fréchet. Comme plus haut dans le cas où V était un ouvert euclidien, on définit à partir de celle de $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$, la topologie $\mathcal{C}^k$ sur l'espace $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^p)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans $\mathbb{R}^p$. C'est aussi une topologie d'espace de Fréchet.

Si W est une seconde variété (à base dénombrable), on peut maintenant considérer l'espace $\mathcal{C}^k(V, W)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans W. Rappelons que grâce au théorème de Whitney, on peut réaliser W comme sous-variété d'un espace euclidien $\mathbb{R}^p$, avec $p = 2q+1$ si q est la dimension de W. Il est alors clair que $\mathcal{C}^k(V, W)$ s'identifie à un fermé de $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^p)$. La topologie induite sur $\mathcal{C}^k(V, W)$ est indépendante du choix du plongement et elle en fait un espace métrisable complet.

Considérons maintenant $\chi^k(V)$, l'espace des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ sur V. Évidemment un champ de vecteurs sur V n'est pas donné en général par une application de V dans $\mathbb{R}^n$, mais seulement localement dans chaque carte. Aussi, pour munir $\chi^k(V)$ d'une topologie, on procède comme pour les applications de V dans $\mathbb{R}^p$. On choisit une suite dénombrable de compacts $(K_s)_s, s \in \mathbb{N}$, telle que chaque K_s soit *contenu dans le domaine* U_s *d'une carte* (U_s, φ_s) de V, et que $V = \bigcup_s \mathrm{Int}(K_s)$. Si X est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$, il est donné, dans chaque carte (U_s, φ_s), par un champ de vecteurs X^s sur l'ouvert $\Omega_s = \varphi_s(U_s)$ de $\mathbb{R}^n$ (le champ $(\varphi_s)_*(X|_{U_s})$). Soit $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \leq k$. En identifiant comme plus haut le champ X^s à une application de Ω_s dans $\mathbb{R}^n$, on considère la semi-norme définie par $p_{s\ell}(X) = \| X^s \|^{\ell}_{\widetilde{K_s}}$. La topologie $\mathcal{C}^k$ sur $\chi^k(V)$ est la topologie définie par ces semi-normes. Cette topologie est indépendante du choix des K_s et des cartes (U_s, φ_s). Elle donne à $\chi^k(V)$ une structure d'espace de Fréchet.

Un cas particulièrement intéressant est celui où V est une *variété compacte*. On peut alors choisir des K_s en nombre fini, soit $K_1, \ldots, K_m$, et pour $E = \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^p)$ ou $\chi^k(V)$, remplacer les *semi-normes* $p_{s\ell}(\cdot) = \| \cdot \|^\ell_{K_s}$, pour chaque ℓ, par une seule *norme* $\| \cdot \|^\ell = \sup_{i=1,\ldots,m} \| \cdot \|^\ell_{K_i}$. (On a affaire à une norme car si $u \in E$ avec $\| u \|^\ell = 0$, alors $u = 0$ sur chaque K_s et, puisque $V = \cup_s K_s$, on aura que $u = 0$ sur V.)

Désignons par $\mathrm{Diff}^k(V)$ l'espace des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ de la variété V dans elle-même. Si la variété V n'est pas compacte, cet espace n'est ni fermé ni ouvert dans $\mathcal{C}^k(V, V)$ (en effet le contrôle d'une application f sur un compact K de V, aussi grand soit-il, ne dit rien sur f dans le complémentaire nécessairement non vide de K). Par contre, si V est compacte et si $k \geq 1$, il est aussi facile de vérifier que $\mathrm{Diff}^k(V)$ est un ouvert de $\mathcal{C}^k(V, V)$ (même si $k = \infty$). Il en résulte, comme on le notera dans la remarque 2.3, que $\mathrm{Diff}^k(V)$ est un espace de Baire (voir la définition 2.3) si V est une variété compacte.

En conclusion, on doit distinguer les deux cas suivants :

1. Si k est fini et que V est compacte, les espaces $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}), \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^p), \chi^k(V)$ sont des *espaces de Banach* (espaces vectoriels normés et complets) (évidemment, la norme $\| \, . \, \|^k$ est définie à une équivalence près).

2. Dans le cas $k = \infty$ et/ou bien si V est non compacte, la structure définie par ces espaces $\mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}) \ldots$ est celle d'*espace de Fréchet* mais non de Banach car l'ensemble infini des semi-normes ne peut pas se ramener à une seule norme.

2.3. La notion de généricité

Rappelons qu'un ensemble Σ *dense* d'un espace topologique E est une partie de E qui intersecte non trivialement chaque ouvert non vide de E : autrement dit, $E = \bar{\Sigma}$. Une propriété capitale des espaces métrisables complets, et donc des espaces de Fréchet, est le théorème de Baire suivant :

***Théorème 2.2* (théorème de Baire).** *Soit E un espace métrisable complet et $(U_s)_s$, $s \in \mathbb{N}$, un ensemble dénombrable d'ouverts denses de E. Alors $\cap_s U_s$ est une partie dense de E (et en particulier n'est pas vide !).*

Démonstration. Choisissons une distance définissant la topologie de E. Soit $(U_s)_s$ une suite d'ouverts denses comme dans l'énoncé et G un ouvert non vide de E. Nous allons construire par récurrence une suite décroissante $\{B_s\}_s$ de boules fermées de G, telle que le rayon de B_s soit *strictement positif* mais plus petit que $\frac{1}{s}$ et telle que $B_s \subset G \cap_{i \leq s} U_i$. Clairement B_1 existe puisque $G \cap U_1$ est un ouvert

non vide. Supposons déjà construit $B_1, \ldots, B_p$. Comme U_{p+1} est un ouvert dense de E, $\mathrm{int}(B_p) \cap U_{p+1}$ est un ouvert non vide. On peut donc trouver une boule fermée B_{p+1} de rayon strictement positif et plus petit que $\frac{1}{p+1}$, contenue dans $\mathrm{int}(B_p) \cap U_{p+1}$. La boule B_{p+1} est en fait contenue dans $G \cap_{i \leq p+1} U_i$ car, par l'hypothèse de récurrence, $B_p \subset G \cap_{i \leq p} U_i$.

Comme E est complet, il existe un point unique $x \in E$ tel que $\cap_n B_n = \{x\}$ (voir remarque 2.2). Ce point est contenu dans G car $x \in B_1 \subset G$. Enfin, comme $x \in G \cap_{i \leq s} U_i$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, *a fortiori* on a $x \in G \cap_s U_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. C'est ce que l'on voulait montrer. ■

Définition 2.3. Un espace topologique séparé E, avec la propriété que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense, est dit *avoir la propriété de Baire*, et est appelé *espace de Baire*.

Une intersection d'une collection dénombrable de sous-ensembles ouverts et denses dans un espace de Baire E est appelée *(sous)-ensemble résiduel* de E.

Par passage aux complémentaires, la définition 2.3 d'un espace de Baire peut se reformuler comme suit :

Définition 2.4. Un espace topologique E séparé, avec la propriété que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide, est dit *avoir la propriété de Baire*, et est appelé *espace de Baire*.

Ces définitions sont équivalentes car, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E, $\mathcal{O}$ est dense si et seulement si $F = E \setminus \mathcal{O}$ est d'intérieur vide.

Remarque 2.3. Baire appelait sous-ensembles de *première catégorie* les sous-ensembles complémentaires des sous-ensembles résiduels.

Le théorème de Baire 2.2 peut se reformuler en disant que tout espace métrisable complet est un espace de Baire. Par exemple, un *fermé dans un espace métrisable complet*, étant lui-même métrisable complet, est un espace de Baire.

Un ouvert dans un espace métrisable complet n'est pas en général complet. Par contre, il est très facile de montrer qu'un *ouvert dans un espace de Baire* est encore un espace de Baire (voir [63], p. 321 par exemple). Ainsi, l'espace des difféomorphismes $\mathrm{Diff}^k(V)$, sur une variété compacte V, étant un ouvert dans l'espace de Baire $\mathcal{C}^k(V, V)$, est lui-même un espace de Baire.

Le théorème de Baire nous dit qu'un ensemble résiduel est dense. Mais la réciproque est fausse et les ensembles résiduels sont beaucoup plus intéressants

que les ensembles denses quelconques. Par exemple, toute intersection dénombrable d'ensembles résiduels est trivialement un ensemble résiduel et donc dense (car une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable). Par contre, il est facile de trouver deux ensembles denses et disjoints dans un espace métrisable complet : par exemple $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (remarquez que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\})$ est résiduel dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$!).

Il suit de la remarque 2.3 que tous les espaces fonctionnels que nous avons introduits dans le précédent paragraphe sont des espaces de Baire. En effet ce sont des espaces de Fréchet, ou bien des fermés dans un tel espace, ou bien des ouverts dans un espace de Baire. C'est cette observation, ainsi que la propriété remarquable relative à l'intersection dénombrable des ensembles résiduels, qui a conduit René Thom à baser la notion de « bon » objet en topologie différentielle (application, champ de vecteur, difféomorphisme) sur celle d'ensemble résiduel dans un espace de Baire :

Définition 2.5. Soit B un espace de Baire. On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est *générique* sur B si elle est vérifiée sur un sous-ensemble résiduel de B.

Par exemple la propriété d'être un nombre irrationnel est une propriété générique dans $\mathbb{R}$, car l'ensemble I des nombres irrationels est égal à une intersection dénombrable d'ouverts denses : $I = \cap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} - \{r\})$, et donc est un ensemble résiduel de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Baire a une remarquable traduction logique suivante :

Si l'on considère une infinité dénombrable de propriétés génériques $\mathcal{P}_i, i \in \mathbb{N}$, sur l'espace de Baire B, alors la propriété $\mathcal{P} = \wedge_i \mathcal{P}_i$ est aussi une propriété générique (la propriété $\mathcal{P}$ est la propriété suivante : elle est vraie pour $b \in B$ si et seulement si toutes les propriétés $\mathcal{P}_i$ sont vraies pour b).

Cette notion de généricité s'applique à tous les espaces fonctionnels que nous avons définis précédemment. Par exemple, si V et W sont deux variétés, une propriété des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans W est dite générique en classe $\mathcal{C}^k$ (ou bien $\mathcal{C}^k$-générique) si elle est vérifiée sur un ensemble résiduel dans $\mathcal{C}^k(V, W)$. Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir comment René Thom a utilisé la notion de transversalité, introduite au paragraphe I-2.4.4, pour définir des propriétés génériques en topologie différentielle.

Remarque 2.4. Une variété à base dénombrable (compacte ou non compacte, à bord ou sans bord) est un espace de Baire puisqu'elle peut être réalisée comme sous-variété (et donc comme fermée) d'un espace euclidien. Sur une variété nous avons maintenant deux définitions différentes pour traduire le fait qu'une propriété

est vraie « *en général* » : un *sens probabiliste* (la propriété est vraie presque partout (c'est-à-dire dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle au sens de Lebesgue)), et un *sens topologique* (la propriété est générique). Il peut se faire que ces deux notions coïncident : par exemple, être irrationnel est une propriété à la fois vraie presque partout et générique dans $\mathbb{R}$. Cependant ces deux notions ne sont pas équivalentes en général, bien qu'il existe des relations profondes entre elles (on pourra consulter le petit livre remarquable écrit par Oxtoby sur ce sujet : *Measure and Category* [51]. Ce livre a d'ailleurs pour sous-titre : « Un survol des analogies entre espaces topologiques et mesurables »).

On peut même trouver une partition de l'intervalle $[0,1]$, par exemple en deux sous-ensembles dont l'un A est résiduel et l'autre K de mesure de Lebesgue égale à 1 : autrement dit le sous-ensemble $A \subset [0,1]$ est à la fois résiduel et de mesure 0 dans $[0,1]$. Voici comment procéder. L'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels sur $[0,1]$ est dénombrable. Numérotons les éléments de cet ensemble : $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère le sous-ensemble de $[0,1]$:

$$A_m = [0,1] \cap \cap_{n=1}^{+\infty}]q_n - \frac{1}{2}(m+1)^{-n}, q_n + \frac{1}{2}(m+1)^{-n}[.$$

Pour tout m, ce sous-ensemble A_m est ouvert et dense (puisqu'il contient $[0,1] \cap \mathbb{Q}$). Le sous-ensemble $K_m = [0,1] \setminus A_m$ est compact. Si $\mathrm{Mes}(\cdot)$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, on a : $\mathrm{Mes}(A_m) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(m+1)^{-n} = \frac{1}{m}$ et donc $\mathrm{Mes}(K_m) \geq 1 - \frac{1}{m}$. Pour tout m, on a $A_{m+1} \subset A_m$ et $K_m \subset K_{m+1}$. L'ensemble $A = \cap_m A_m$ est résiduel. Son complémentaire est le sous-ensemble $K = \cup_m K_m$. Comme les K_m forment une suite croissante de compacts dans $[0,1]$, le sous-ensemble K est mesurable (voir [18]). De plus, comme $\mathrm{Mes}(K_m) \to 1$ pour $m \to +\infty$, on a $\mathrm{Mes}(K) = 1$.

Notons aussi que la notion de généricité a une définition facile et naturelle sur les espaces fonctionnels qui sont des espaces de dimension infinie, alors que la manière de faire une théorie de la mesure en dimension infinie n'est pas du tout claire.

2.4. Le lemme fondamental de transversalité

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer un résultat, dit lemme fondamental de transversalité, qui est une traduction du théorème de Sard en termes de transversalité. Ce résultat donne un critère simple pour que, dans une famille d'applications, presque toutes les applications soient transverses à une sous-variété donnée au but. Ce résultat va nous permettre de donner un premier exemple de propriété générique : la propriété d'être une fonction de Morse dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Rappelons que deux sous-espaces vectoriels H et L d'un espace vectoriel de dimension finie E, sont dits transverses dans E (ce que l'on écrit $H \overline{\pitchfork} L$ *dans* E) si et seulement si $H + L = E$. Nous avons introduit cette définition et donné quelques propriétés sur les dimensions et codimensions dans le paragraphe I-2.2.1. Rappelons la relation sur les dimensions :

$$\dim(H) + \dim(L) = \dim(H + L) + \dim(H \cap L), \tag{2.5}$$

alors que la codimension de $H \subset E$ dans E est par définition le nombre :

$$\mathrm{codim}_E(H) = \dim(E) - \dim(H).$$

Remarque 2.5. Supposons que H et L soient transverses dans E. La formule (2.5) permet de dire que la codimension de H dans E :

$$\mathrm{codim}_E(H) = \dim(E) - \dim(H)$$

est égale à la codimension de $H \cap L$ dans L :

$$\mathrm{codim}_L(H \cap L) = \dim(L) - \dim(H \cap L).$$

Autrement dit, la codimension est préservée par intersection. On peut intervertir les rôles de H et L : cela tient au fait que la transversalité est une relation symétrique.

Voici un critère élémentaire de préservation de la transversalité à travers une application linéaire. Ce résultat d'algèbre linéaire est la clé pour établir la proposition 2.3.

Lemme 2.2. *Soit E, E' des espaces vectoriels et ρ une* surjection *linéaire de E sur E'. On considère des sous-espaces vectoriels $H, L \subset E$ et $H', L' \subset E'$ tels que $H' = \rho(H)$ et $L = \rho^{-1}(L')$. Alors $H \overline{\pitchfork} L$ dans E si et seulement si $H' \overline{\pitchfork} L'$ dans E'.*

Démonstration. (i) Supposons que $H \overline{\pitchfork} L$ dans E, c'est-à-dire que $H + L = E$. On en déduit que $\rho(H) + \rho(L) = \rho(E)$. Comme ρ est surjective : $\rho(E) = E'$. Par définition, on a $\rho(H) = H'$. Enfin $\rho(L) = \rho \circ \rho^{-1}(L') = L'$. On obtient donc que $H' + L' = E'$.
(ii) Inversement, supposons que $H' + L' = E'$. Pour tout $x \in E$, on peut trouver $h \in H$ et $l_1 \in L$ tels que $\rho(x) = \rho(h) + \rho(l_1)$. Cela signifie que $x - h - l_1 \in \mathrm{Ker}(\rho)$ (le noyau de ρ). Mais on a

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \rho^{-1}(\{0\}) \subset \rho^{-1}(L') = L.$$

On peut donc trouver un $l_2 \in L$ tel que $x - h - l_1 = l_2$, autrement dit, $x = h + (l_1 + l_2) \in H + L$. On obtient donc que $E = H + L$. ∎

Remarque 2.6. Voici un cas particulier d'application du lemme 2.2. On considère $H, L \subset E$, on prend $E' = E/L, L' = \{0\}$ et, pour surjection linéaire, la surjection canonique $\pi : E \mapsto E/L$. Alors $H' \overline{\pitchfork} \{0\}$ dans E' signifie simplement que $H' = E'$. On obtient donc que : *$H \overline{\pitchfork} L$ dans E si et seulement si $\pi|_H$ est une application surjective sur le quotient E/L.*

Soit f une application différentiable d'une variété M dans une variété N. En généralisant la définition I-2.16, on dit que f est transverse à une sous-variété S de N au point $m \in M$ (ce que l'on note $f \overline{\pitchfork}_m S$) si $f(m) \notin S$ ou bien si $df(m)[T_m M)]$ et $T_{f(m)}S$ sont des sous-espaces vectoriels transverses dans $T_{f(m)}N$. Rappelons aussi que f est dite transverse à S si f est transverse à S en tout point de M (ce que l'on note $f \overline{\pitchfork} S$).

Supposons que $f(M) \cap S \neq \emptyset$. Alors la contre-image $f^{-1}(S) = \Sigma$ est une sous-variété de M et, en tout $m \in \Sigma$, on a $T_m\Sigma = df(m)^{-1}(T_{f(m)}S)$ (voir le théorème I-2.4). Comme il est dit dans ce théorème, la *codimension de Σ dans M est égale à la codimension de S dans N*. Cette préservation de la codimension suit de la remarque 2.5 ci-dessus.

Soit maintenant

$$F : (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto y = F(x, \lambda) \in \mathbb{R}^q,$$

une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ où $\mathbb{R}^p$ est l'espace du paramètre λ. On note $F_\lambda(x) = F(x, \lambda)$ la famille d'applications ainsi définie, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$, à paramètre dans $\mathbb{R}^p$. On va noter par Π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^p$ parallèle à $\mathbb{R}^n$, définie par $\Pi(x, \lambda) = \lambda$.

La proposition suivante donne une caractérisation très utile de la transversalité dans une famille à paramètre d'applications.

Proposition 2.3. *Soit une application $F(x, \lambda)$ comme ci-dessus et $S \subset \mathbb{R}^q$ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^q$.* Supposons que F soit transverse à S *et soit $\Sigma = F^{-1}(S) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, que l'on suppose non vide. Alors :*

1. *Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*
2. *Soit $(x, \lambda) \in \Sigma$. L'application F_λ est transverse à S au point x si et seulement si (x, λ) est un point régulier de l'application $\Pi|_\Sigma$ (ce qui est équivalent à dire que la différentielle $d(\Pi|_\Sigma)(x, \lambda) : T_{(x,\lambda)}\Sigma \mapsto \mathbb{R}^p$ est une submersion sur $\mathbb{R}^p$).*
3. *Les λ tels que F_λ ne soit pas transverse à S sont les valeurs critiques de $\Pi|_\Sigma$.*

Commentaire : L'équivalence mentionnée dans l'item 2 est une conséquence des définitions I-2.8 et I-2.12.

Démonstration. Comme l'application F est supposée transverse à S, le point (1) suit du théorème I-2.4. Le point (3) suit du point (2). En effet si F_λ n'est pas transverse à S, il existe x tel que $F_\lambda(x) \in S$ (c'est-à-dire $(x,\lambda) \in \Sigma$) et tel que F_λ ne soit pas transverse à S en ce point. D'après le point (2), ceci est équivalent à dire que λ est un point critique de $\Pi|_\Sigma$ et inversement.

Pour démontrer le point (2), nous allons faire deux applications successives du lemme 2.2. Soit $(x,\lambda) \in \Sigma$. On applique tout d'abord le lemme 2.2 avec $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $H = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, $L' = T_{F_\lambda(x)}S$, $E' = \mathbb{R}^q$ et $\rho = dF(x,\lambda)$. Par hypothèse, ρ est bien surjective. De plus, comme F est transverse en (x,λ) à S, on a $L = \rho^{-1}(L') = T_{(x,\lambda)}\Sigma$. Remarquez que $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ est l'espace tangent au facteur $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$ au point (x,λ). On peut appliquer le lemme 2.2 :

$$\{dF_\lambda(x)[R^n \times \{0\}] + T_{F_\lambda(x)}S = \mathbb{R}^q\} \Longleftrightarrow \{T_{(x,\lambda)}\Sigma + (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p\}. \quad (2.6)$$

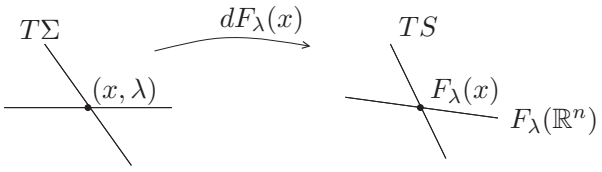


Figure 2.1. Illustration de (2.6).

Nous allons appliquer une deuxième fois le lemme 2.2 en considérant maintenant la projection canonique $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$. Comme cette application est linéaire, on a $d\Pi(x,\lambda) = \Pi$ et, de plus, $d(\Pi|_\Sigma)(x,\lambda) = (d\Pi)(x,\lambda)|_{T_{(x,\lambda)}\Sigma}$. On prend $L' = \{0\} \subset \mathbb{R}^p$ et $H = T_{(x,\lambda)}\Sigma$ (et donc $L = \mathbb{R}^n \times \{0\}$). On obtient que (voir remarque 2.6) :

$$\{T_{(x,\lambda)}\Sigma + (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p\} \Longleftrightarrow \{d(\Pi|_\Sigma)(x,\lambda)[T_{(x,\lambda)}\Sigma] = \mathbb{R}^p\}. \quad (2.7)$$

Le point (2) suit alors de (2.6) et (2.7). ∎

Remarque 2.7. Soit $F(x,\lambda)$ comme dans la proposition 2.3 et $(x,\lambda) \in \Sigma$. L'équivalence (2.7) signifie que *le point* (x,λ) *est un point régulier de l'application* $\Pi|_\Sigma$ si et seulement si *le plan tangent* $T_{(x,\lambda)}\Sigma$ *est transverse à* $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ (plan tangent à $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$ au point (x,λ)). Si, par l'abus d'écriture usuel, on identifie les plans tangents à des plans affines par les points considérés, cette dernière condition peut évidemment se dire : $T_{(x,\lambda)}\Sigma$ *est transverse à* $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$ *au point* (x,λ).

En appliquant le théorème de Sard I-2.2, on obtient maintenant l'important résultat suivant :

Proposition 2.4. (Lemme fondamental de transversalité) *Soit une application $F(x,\lambda)$ comme ci-dessus. On note $F_\lambda(x) = F(x,\lambda)$ la famille à paramètres d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ ainsi définie. Soit $S \subset \mathbb{R}^q$ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^q$.* Supposons que F soit transverse à S. *Alors, pour presque tous les $\lambda \in \mathbb{R}^p$, l'application F_λ est transverse à S (autrement dit, il existe $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$ tel que* $\mathrm{mes}(\Gamma) = 0$ *et $\lambda \in \mathbb{R}^p \setminus \Gamma \Rightarrow F_\lambda \overline{\pitchfork} S$).*

Démonstration. D'après le point (3) de la proposition 2.3, λ est une valeur singulière de l'application $\Pi|_\Sigma$ si et seulement si l'application F_λ n'est pas transverse à la sous-variété S. En appliquant le théorème de Sard à cette application $\Pi|_\Sigma$ (voir l'item 5 de la remarque I-2.6), on obtient donc que, pour presque tous les $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $F_\lambda \overline{\pitchfork} S$ (figure 2.2). ■

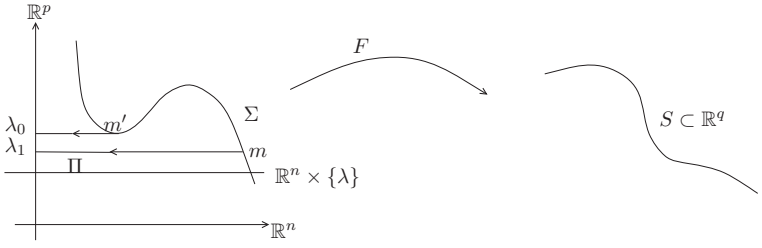


Figure 2.2. λ_0 est critique pour la projection, λ_1 est transverse. Le point m (resp. m') est régulier (resp. singulier) pour la projection.

Comme il est indiqué à l'item 5 de la remarque I-2.6, le théorème de Sard se généralise aux applications $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés $\mathcal{C}^\infty$ quelconques. Rappelons qu'un ensemble de mesure nulle dans une variété Λ est un ensemble dont l'intersection avec chaque carte a une image de mesure nulle par l'application de carte, et qu'une propriété est dite vérifiée presque partout sur Λ si elle est vérifiée dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle de Λ. La même démonstration que celle faite plus haut permet alors de remplacer $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ par des variétés :

Proposition 2.5. *Soit $F : (x,\lambda) \in M \times \Lambda \mapsto F(x,\lambda) \in N$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, où M, N sont des variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et Λ est un espace de paramètres. On note $F_\lambda(x) = F(x,\lambda)$ la famille à paramètres d'applications de M dans N, à paramètres dans Λ. Soit $S \subset N$ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de N.* Supposons que F soit transverse à S. *Alors pour presque tous les $\lambda \in \Lambda$, F_λ est aussi transverse à S.*

Soit maintenant une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, à base dénombrable, variété qui peut être l'espace $\mathbb{R}^n$ tout simplement. On appelle fonction de Morse f sur M toute fonction $\mathcal{C}^2$ dont tous les points singuliers sont non dégénérés (cette propriété est à vérifier dans un recouvrement de M par des cartes). On rappelle que cela signifie qu'en tout point singulier de f sur M les dérivées partielles de f sont nulles, mais que le déterminant du hessien est non nul (voir définitions I-3.5 et I-3.6). Nous allons démontrer que la propriété d'être de Morse est générique en classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire que les fonctions de Morse forment un ensemble résiduel dans l'espace $\mathcal{C}^2(M,\mathbb{R})$. Tout d'abord nous allons prouver le résultat suivant sur $\mathbb{R}^p$, résultat qui est une conséquence directe de la proposition 2.4 :

Lemme 2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^\infty$, soit $g(x,\lambda) = f(x) + L(x,\lambda)$, où $L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est une forme linéaire générale. Alors, pour presque tous les $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, la fonction g_λ définie par $x \mapsto g_\lambda(x) = g(\lambda, x)$ est une fonction de Morse.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on considère l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto F(x,\lambda) = \frac{\partial g(x,\lambda)}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \lambda_1, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout x fixé, on vérifie immédiatement que $\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial \lambda} = I_{\mathbb{R}^n}$, où $I_{\mathbb{R}^n}$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^n$. En particulier, l'application F est transverse à la sous-variété $S = \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ (car la relation de la définition I-2.16 de la transversalité est trivialement satisfaite). Maintenant, dire que $F(x,\lambda) = 0$ signifie que x est un point singulier de la fonction g_λ. Dire, qu'en un tel point, l'application $F_\lambda(\cdot) = F(\cdot,\lambda)$ est transverse à $\{0\}$, signifie que la différentielle $dF_\lambda(x)$ est un isomorphisme linéaire. Comme cette matrice est la hessienne de g_λ au point x, cela signifie que x est un point singulier de Morse de g_λ. La proposition 2.4 implique donc que, pour presque tout λ, la fonction g_λ est une fonction de Morse. ■

Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, à base dénombrable. Nous allons maintenant montrer que la propriété d'être de Morse est générique en classe $\mathcal{C}^2$:

Proposition 2.6. *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ à base dénombrable. Alors la propriété d'être de Morse est générique dans l'espace $\mathcal{C}^2(M,\mathbb{R})$.*

Démonstration. Considérons un compact quelconque K contenu dans un ouvert U, domaine de carte difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On peut supposer que U est identifié à

$\mathbb{R}^n$. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de support contenu dans U et égale à 1 sur K. Le lemme 2.3 implique que, pour presque tous les $\lambda \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\tilde{g}_\lambda(x)$ égale à $f(x) + \varphi(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ sur U, et étendue par 0 dans le complémentaire de U, est une fonction de Morse sur K (c'est-à-dire que cette fonction n'a que des points singuliers non dégénérés sur K). D'un autre côté, il est facile de voir que toute fonction assez proche d'une fonction de Morse au sens de la topologie $\mathcal{C}^2$ n'a que des points singuliers non dégénérés sur K (car les coefficients de toute matrice hessienne sont contrôlés dans la topologie $\mathcal{C}^2$). Il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ qui n'ont que des points singuliers non dégénérés sur K forment un ouvert dense dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$. En recouvrant la variété M par une infinité dénombrable de tels compacts K_n, $n \in \mathbb{N}$, on voit que l'ensemble des fonctions de Morse est égal à l'intersection $\cap_n \mathcal{M}_n$ où $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(K_n)$. L'ensemble des fonctions de Morse est donc un ensemble résiduel dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$. Autrement dit, la propriété d'être de Morse est une propriété générique dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$. ■

Il est facile d'adapter la démontration précédente pour montrer que la propriété d'être de Morse est une propriété générique dans $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ pour tout $k \geq 2$, y compris pour $k = \infty$.

Si M est une variété compacte, il est clair que les fonctions de Morse forment un ouvert dans la topologie $\mathcal{C}^2$, et la démonstration précédente montre que cet ensemble est dense (pour cette topologie) : la généricité, dans ce cas, correspond à la propriété plus forte, d'être vraie pour un ensemble ouvert et dense (en particulier c'est une propriété stable par $\mathcal{C}^2$-perturbation). Ce résultat reste vrai dans toutes les topologies $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 2$, y compris pour $k = \infty$. Il est à noter que les propriétés d'être dense et ouvert varient de façon inverse en fonction de k. Le meilleur énoncé est donc obtenu en dissociant les deux propriétés : si M est une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, les fonctions de Morse forment un ensemble ouvert dans la $\mathcal{C}^2$-topologie (toute fonction assez proche d'une fonction de Morse au sens $\mathcal{C}^2$ est encore une fonction de Morse) et forment un ensemble dense pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ (on peut arbitrairement approcher toute fonction par une fonction de Morse de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens de la topologie $\mathcal{C}^\infty$).

Évidemment, si M n'est pas compacte, la propriété d'être de Morse ne peut pas être vraie dans un ouvert de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (et donc *a fortiori* dans aucun ouvert de $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ pour aucun $k \in \mathbb{N}$), car cette topologie ne contrôle les perturbations que sur des compacts de M et non uniformément sur M : si $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est une fonction de Morse et

$$\mathcal{V}(K, k, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid ||f \circ \phi^{-1} - g \circ \phi^{-1}||_K^k < \varepsilon\},$$

avec un compact K contenu dans le domaine d'une carte (U, ϕ), on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{V}(K, k, \varepsilon)$ avec un point singulier dégénéré dans $M \setminus K \neq \emptyset$ (car aucune condition n'est imposée à g sur $M \setminus K$).

2.5. Le théorème de transversalité de Thom

2.5.1. Le cas euclidien

Soit $P^k_{p,q}$ avec $k \geq 0$, l'espace des applications polynomiales de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, de degré inférieur ou égal à k. Un élément P de cet espace s'écrit $P = (P_1, \ldots, P_q)$ où les P_i sont des polynômes des coordonnées $(X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{R}^p$ et de degré k.

Si $f = (f_1, \ldots, f_q) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et $k \geq 1$, on peut définir une application $T^k f : \mathbb{R}^p \mapsto P^k_{p,q}$ qui, à chaque $x \in \mathbb{R}^p$, fait correspondre le *polynôme de Taylor de degré k de f en x*. Pour calculer $T^k f(x) = (T^k f_1(x), \ldots, T^k f_q(x))$, on développe $f_i(x+X)$ par rapport à $X = (X_1, \ldots, X_p)$; les $T^k f_i(x)$ sont des polynômes en X dont les coefficients sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de x. Cela revient à dire que, pour obtenir $T^k f_i(x)$, on tronque le développement de Taylor infini de f_i en X, calculé au point x, en excluant tous les termes de degré supérieur ou égal à $k+1$. On peut identifier les coefficients de $T^k f_i(x)$ aux dérivées partielles de f_i, calculées au point x :

$$T^k f_i(x)(X) = f_i(x) + \sum_{|j|=1}^{k} \frac{1}{j!} \partial^j f_i(x) X^j, \tag{2.8}$$

car la formule de Taylor avec reste de Young (théorème I-3.2) nous permet d'écrire que : $f_i(x+X) = T^k f_i(x)(X) + o(\|X\|^k)$.

Définition 2.6. On appelle *k-jet de f en x* la fonction polynomiale

$$j^k f(x) = (x, T^k f(x)) \in J^k_{p,q} = \mathbb{R}^p \times P^k_{p,q}.$$

L'application $j^k f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p \times P^k_{p,q}$ est appelée le k-jet (ou k-extension) de f et $J^k_{p,q}$ est appelé *espace de k-jets d'applications* de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (pour $k = 0$, $j^0 f : x \mapsto (x, T^0 f(x) = f(x))$ est juste le graphe de f).

Par exemple, si $p = q = 1$, le jet $j^r f$ d'une application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x))$.

Soit S une sous-variété de $J^k_{p,q}$ et $\mathcal{T}(S)$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $j^k f \overline{\pitchfork} S$. On choisit une norme $\|\cdot\|$ dans $P^k_{p,q} \approx \mathbb{R}^{qM(q,k)}$ ($M(q,k)$ est le nombre de monômes à q indéterminées et de degré inférieur à k).

Théorème 2.3 **(Théorème de transversalité de Thom dans le cas euclidien).** *Soit* $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ *quelconque de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\lambda \in P^k_{p,q}$ *tel que* $\| \lambda \| < \varepsilon$ *et* $f + \lambda \in \mathcal{T}(S)$.

Remarque 2.8. Par un abus d'écriture habituel, on assimile le polynôme (vectoriel) $\lambda \in P^k_{p,q}$ (identifié avec ses coefficients) avec la fonction polynomiale (vectorielle) $\lambda : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}^q$ que ce polynôme définit. C'est ainsi que l'on écrit $f + \lambda$ dans l'énoncé du théorème 2.3, pour désigner la fonction (vectorielle) $x \mapsto f(x) + \lambda(x)$, et que l'on écrira, dans la preuve ci-dessous, $j^k\lambda(x)$ pour désigner le k-jet en x de la fonction $x \mapsto \lambda(x)$.

Preuve du théorème 2.3. Soit l'application :

$$F \ : (x, \lambda) \in J^k_{p,q} = \mathbb{R}^p \times P^k_{p,q} \mapsto F_\lambda(x) = F(x, \lambda) = f(x) + \lambda(x) \in \mathbb{R}^q,$$

où $P^k_{p,q}$ joue le rôle d'espace de paramètre. Pour tout λ fixé, on considère le k-jet de F_λ en x :

$$G_\lambda(x) = j^k F_\lambda(x) = (x, T^k f(x) + T^k \lambda(x)).$$

On obtient ainsi une application :

$$G \ : (x, \lambda) \in J^k_{p,q} \mapsto G(x, \lambda) = G_\lambda(x) \in J^k_{p,q}.$$

Pour chaque x *fixé*, l'application $\lambda \mapsto j^k\lambda(x)$ est un automorphisme linéaire de $P^k_{p,q}$: c'est tout simplement l'automorphisme induit dans l'espace $P^k_{p,q}$ par la translation $X \mapsto X + x$; en particulier, $j^k\lambda(0) \equiv \lambda$. Comme $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \lambda) = \mathrm{Id}|_{\mathbb{R}^p}$ pour tout (x, λ), il en résulte que la différentielle $dG(x, \lambda)$ est aussi un automorphisme linéaire de $J^k_{p,q}$ pour tout $(x, \lambda) \in J^k_{p,q}$.

On a donc : $G \overline{\pitchfork} S$ pour toute sous-variété $S \subset J^k_{p,q}$ (le fait que $dG(x, \lambda)$ est un automorphisme linéaire pour tout $(x, \lambda) \in J^k_{p,q}$ implique que G est transverse à chaque point de $J^k_{p,q}$, considéré comme sous-variété de dimension 0, et donc *a fortiori* est transverse à chaque sous-variété S). Nous sommes donc dans les conditions de la proposition 2.4 (dite « Lemme fondamental de transversalité »). En conséquence, pour presque tout $\lambda \in P^k_{p,q}$, on a $j^k F_\lambda \overline{\pitchfork} S$. En particulier, on peut trouver un tel $\lambda \in P^k_{p,q}$ avec $||\lambda|| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. ■

Remarque 2.9. L'application $\lambda \mapsto G(\cdot, \lambda)$ de $P^k_{p,q}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est continue. Il suit donc du théorème 2.3 que $\mathcal{T}(S)$ est *dense* dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Nous allons montrer dans le corollaire suivant, que la propriété $j^k f \overline{\pitchfork} S$ est générique dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$:

Corollaire 2.1. *Soit S une sous-variété quelconque de $J^k_{p,q}$. Alors la propriété $j^k f \overline{\pitchfork} S$ est générique dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ (ce qui signifie que $\mathcal{T}(S)$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$).*

Démonstration. Soit K un compact quelconque de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{T}(S, K)$ l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tels que $j^k f \overline{\pitchfork}_x S$ pour tout $x \in K$. Comme $\mathcal{T}(S) \subset \mathcal{T}(S, K)$, cet ensemble est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, en conséquence de la remarque 2.9. Maintenant, l'ensemble $\mathcal{T}(S, K)$ est ouvert. En effet si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et si toutes les dérivées partielles d'une fonction g jusqu'à l'ordre $k+1$ sont suffisamment proches de celles de f, uniformément sur le compact K, alors $g \in \mathcal{T}(S, K)$, car la condition de transversalité est une condition ouverte sur les dérivées premières de $j^k g$, et donc une condition ouverte sur les dérivées partielles d'ordre $k+1$ de g. Cette condition de proximité définit un voisinage ouvert de f en topologie $\mathcal{C}^{k+1}$ et donc *a fortiori* dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$, les ouverts de la $\mathcal{C}^k$-topologie sont évidemment des ouverts de la $\mathcal{C}^\infty$-topologie). En conclusion, $\mathcal{T}(S, K)$ est un ensemble ouvert dense dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Recouvrons maintenant $\mathbb{R}^p$ par une infinité dénombrable de compacts K_n avec $n \in \mathbb{N}$ (par exemple les boules fermées centrées à l'origine et de rayon n). Alors $\mathcal{T}(S) = \cap_n \mathcal{T}(S, K_n)$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, comme intersection d'une infinité dénombrable d'ouverts denses. ∎

Remarque 2.10.

1. Considérons deux variétés M, N et une sous-variété Σ de N. Soit aussi $f : M \mapsto N$ une application différentiable de M dans N. Alors, dire que f est transverse à Σ est équivalent à dire que l'application graphe $\text{Graphe}(f) : x \in M \mapsto (x, f(x)) \in M \times N$ est transverse à la sous-variété $S = M \times \Sigma \subset M \times N$. Cette remarque s'applique dans le cadre du théorème 2.3 lorsque la sous-variété $S \subset J^k_{p,q}$ est égale à $\mathbb{R}^p \times \Sigma$, avec Σ une sous-variété de $P^k_{p,q}$: la condition $j^k f \overline{\pitchfork} S$ est alors équivalente à la condition $T^k f \overline{\pitchfork} \Sigma$, car $j^k f$ n'est rien d'autre que l'application $\text{Graphe}(T^k f)$.

2. Le théorème 2.3 et le corollaire 2.1 généralisent ce qui a été dit à propos des fonctions de Morse sur $\mathbb{R}^p$ à la fin du précédent paragraphe. En effet, si f est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^p$, on a $T^1(x) = (f(x), df(x))$, et dire que x_0 est un point singulier non dégénéré est équivalent à dire que $df(x_0) = 0$, et aussi que l'application $x \mapsto df(x)$ a une différentielle inversible en x_0, autrement dit que l'application $x \mapsto T^1 f(x)$ est transverse à la sous-variété $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\} \subset P^1_{p,1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$: les fonctions de Morse sont caractérisées par le fait que leur 1-jet est transverse à la sous-variété $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \{0\} \subset J^1_{p,1}$.

Compte tenu de la remarque précédente, le fait que les fonctions de Morse soient génériques suit donc du corollaire 2.1.

2.5.2. Formulation générale

La notion de jet peut être rendue intrinsèque en introduisant l'idéal principal $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x$ des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulles en x dans l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{R}^P)_x$ de tous les germes en x des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Rappelons qu'un germe de fonction en x est représenté par une fonction définie sur un voisinage arbitraire de x ; on peut définir trivialement la somme et le produit des germes et vérifier que ces opérations munissent $\mathcal{O}(\mathbb{R}^p)_x$ d'une structure d'anneau. Il est alors clair, grâce à la formule de Taylor, que deux fonctions ont même k-jet en x si et seulement si elles diffèrent par un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x^{k+1}$ (l'idéal engendré par les produits de $k+1$ fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x$, qui sont caractérisées par l'annulation de leur polynôme de Taylor d'ordre k).

Plus généralement, on peut considérer les germes $\mathcal{C}^\infty$ en $x \in \mathbb{R}^p$ d'applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. L'ensemble de ces germes forment un module $\mathcal{A}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)_x$ sur l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{R}^p)_x$, dont la structure est induite par la structure vectorielle de $\mathbb{R}^q$, et deux germes d'applications ont le même k-jet en x si et seulement si ils diffèrent par un élément du sous-module $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x^{k+1}\mathcal{A}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)_x$ (sous-module des germes d'applications dont les composantes sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x^{k+1}$). Notons par $J^k_{p,q}(x)$ l'espace des k-jets en x. On a maintenant une nouvelle définition de $J^k_{p,q}(x)$:

Lemme 2.4. *L'espace $J^k_{p,q}(x)$ peut être identifié à*

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)_x / \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x^{k+1}\mathcal{A}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)_x.$$

Remarque 2.11. Dans le sous-paragraphe précédent, nous n'avions pas donné de nom particulier à $J^k_{p,q}(x)$ car cet espace était identifié à $\{x\} \times P^k_{p,q} \sim P^k_{p,q}$, l'espace des polynômes de Taylor en x. Mais cette identification est liée au fait que l'on utilise les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$. Dans la nouvelle définition, aucune mention à un choix de système de coordonnées n'est faite : cette définition est donc intrinsèque, mais il est clair que l'on doit inclure le symbole x dans la notation des jets en x. En regardant le quotient comme la définition d'une congruence, le k-jet $j^k f(x)$ peut être vu comme : f mod $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)_x^{k+1}\mathcal{A}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)_x$ (ici le symbole f désigne aussi le germe de f en x). Si $T^k f(x)$ est le polynôme de Taylor en x, le représentant de $j^k f(x)$ dans les coordonnées canoniques est $(x, T^k f(x))$.

Comme la définition de jet, résultant du lemme 2.4, est indépendante du choix des coordonnées, elle s'étend naturellement aux applications entre variétés. On dira que deux applications $\mathcal{C}^\infty$ $f, g : M \mapsto N$ entre deux variétés $\mathcal{C}^\infty$ M, N (de dimensions p et q respectivement) ont un même k-jet en $x \in M$, si et seulement si $f(x) = g(x) = y$, et si, dans des cartes au voisinage de x et de y, les deux applications ont même k-jet au sens précédent des applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (p et q sont les dimensions de M et N respectivement). On appelle k-jet d'une application f en x, que l'on note $j^k f(x)$, la classe d'équivalence de f pour cette relation d'équivalence : avoir même k-jet en x. Désignons par $J^k(M,N) = \{j^k f(x) \mid x \in M, f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)\}$, l'ensemble de tous les k-jets d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de M dans N. On appelle k-jet de $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ l'application $x \in M \mapsto j^k f(x) \in J^k(M,N)$. Si (U,φ) et (W,ψ) sont des cartes de M et N respectivement, avec $\varphi(U) = \mathbb{R}^p$ et $\psi(W) = \mathbb{R}^q$, l'ensemble des applications $f : U \mapsto V$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, et l'ensemble de leurs k-jets s'identifie à $J^k_{p,q}$. Ces identifications définissent des cartes sur $J^k(M,N)$ qui donnent à cet espace une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$. Il est alors très facile d'étendre le corollaire 2.1 en remplaçant $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ par des variétés $\mathcal{C}^\infty$ quelconques :

***Théorème 2.4* (Théorème de transversalité de Thom pour les variétés).** *Soit M, N des variétés $\mathcal{C}^\infty$ quelconques et S une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $J^k(M,N)$. Alors la propriété de transversalité $j^k f \overline{\pitchfork} S$ est générique dans $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ (ce qui signifie que $\mathcal{T}(S)$ est un ensemble résiduel dans l'espace de Baire $\mathcal{C}^\infty(M,N)$).*

Démonstration. Nous allons introduire l'ensemble $\mathcal{T}(S)$ des applications dont le k-jet est transverse à S. Cet ensemble peut se représenter comme une intersection dénombrable d'ensembles, chacun d'eux formé des applications transverses sur un compact contenu dans un domaine de carte U de M et à valeurs sur ce domaine dans un autre domaine de carte W de N. Par le corollaire 2.1, chacun de ces ensembles est résiduel dans $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ et donc l'ensemble $\mathcal{T}(S)$ est résiduel, comme intersection dénombrable d'ensembles résiduels. ∎

Le théorème précédent n'est pas encore assez général pour couvrir tous les exemples que nous voulons considérer. Par exemple, un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n est représentable localement, mais pas globalement en général, comme une application (d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$), sauf dans le cas où le fibré tangent TM (définition I-2.10) est trivialisable, c'est-à-dire difféomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$. Par exemple, le fibré tangent à la sphère S^2 n'est pas trivialisable. En effet, il suit de la formule (II-4.3) de Poincaré-Hopf que tout champ de vecteurs sur S^2 a au moins un point singulier et, si le fibré tangent TS^2 était trivialisable, il existerait des champs de vecteurs sans points singuliers sur S^2.

Pour couvrir ce cas, nous avons besoin des notions de *fibré différentiel* et de *section* de tels fibrés. Le fibré tangent à une variété est un exemple de fibré différentiel et un champ de vecteurs est une section du fibré tangent. Nous allons introduire succinctement ces notions (voir plus de détails dans [36–38, 67]). Sauf mention expresse du contraire, tous les objets considérés (variétés, applications) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 2.7. Un *fibré différentiel* d'espace total E, de base B, de fibre (type) F, et de projection π, est la donnée d'une application différentiable π de la variété E dans la variété B. On suppose que F est aussi une variété et que l'on a la propriété suivante de trivialité locale : chaque point de B possède un voisinage ouvert W (dit ouvert de trivialisation) tel qu'il existe un difféomorphisme $\Psi : W \times F \mapsto \pi^{-1}(W)$ avec, sur $W \times F$, $\pi \circ \Psi = p_r$, où p_r est la projection canonique de $W \times F$ sur W. La contre-image $\pi^{-1}(x) = F_x$ est appelée *fibre en* x. Cette fibre est difféomorphe à F pour tout $x \in B$.

Le fibré différentiel est dit *linéaire de dimension* n, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathbb{R}^n$, et que chaque fibre F_x a une structure d'espace linéaire de dimension n. On suppose, de plus, que les difféomorphismes $\Psi : W \times \mathbb{R}^n \mapsto \pi^{-1}(W)$ sont linéaires sur chaque facteur $\{b\} \times \mathbb{R}^n$, avec $x \in W$.

On appelle *section du fibré*, toute application $\sigma : B \mapsto E$ telle que $\pi \circ \sigma = Id|_B$, autrement dit : $\sigma(x) \in F_x$ pour tout $x \in B$. L'ensemble de toutes les sections du fibré est noté $\Gamma(E)$. (Remarquez l'abus de language qui fait donner le même nom à un fibré différentiel et à son espace total.)

Remarque 2.12. Le fibré tangent TM à une variété M de dimension n, défini ensemblistement comme la réunion disjointe des espaces tangents, $TM = \coprod_x T_xM$, est un exemple d'espace total de fibré différentiel, en général non trivial (par exemple, l'espace tangent de la 2-sphère S^2). Rappelons que l'on définit des cartes sur TM en identifiant l'ensemble des vecteurs tangents aux points d'un domaine de carte (U, φ), $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, avec $U \times \mathbb{R}^n$ (définition I-2.10 et le commentaire qui suit). La projection π est l'application qui envoie chaque vecteur tangent sur le point où il est tangent ; la fibre en x est l'espace tangent T_xM. Rappelons aussi que les espaces tangents sont munis d'une structure naturelle d'espace vectoriel, et l'application de carte $\pi^{-1} : U \mapsto U \times \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire de T_xM sur $\{x\} \times \mathbb{R}^n$. L'espace tangent TM est donc un fibré différentiel linéaire. Les sections du fibré tangent sont évidemment les champs de vecteurs. L'espace des sections est donc l'espace des champs de vecteurs : $\chi^\infty(M) = \Gamma(TM)$.

L'importance de la notion de fibré différentiel tient au fait que tous les *champs* de la géométrie différentielle et de la physique contemporaine, sont des sections de fibrés différentiels linéaires (la plupart des grandes lois de la physique contemporaine s'expriment à travers les propriétés de champs particuliers). Nous avons déjà cité le cas des champs de vecteurs qui est le plus simple. On peut ajouter les formes différentielles, les champs de tenseurs, les métriques riemanniennes, lorentziennes (pour la formulation de la relativité générale par exemple), etc. On trouvera de nombreux exemples de l'utilisation de ces notions dans les références citées plus haut.

Un produit $B \times F$ de deux variétés donne un exemple trivial d'espace total de fibré différentiel avec B comme base, F comme fibre, et la projection canonique de $B \times F$ sur B comme projection. Les sections de ce fibré trivial sont les graphes des applications de B dans F. Dans ce cas, la notion de section de fibré ne présente pas un grand intérêt, et on peut travailler directement avec l'application $B \mapsto F$ elle-même. Par contre, si le fibré n'est pas trivial (c'est-à-dire ne se réduit pas à un produit), les sections ne sont pas (globalement) équivalentes à des graphes d'applications. Par exemple, on a signalé plus haut, qu'un champ de vecteurs sur la sphère S^2 n'est pas équivalent à la donnée d'une application de S^2 dans $\mathbb{R}^2$ (même si le fibré tangent est localement difféomorphe au produit d'ouvert de S^2 par $\mathbb{R}^2$). Le ruban de Möbius, introduit dans l'item 5 du paragraphe I-2.1.3, comme exemple de surface non orientable, peut être vu comme un fibré différentiel non trivial de fibre $\mathbb{R}$ et de base S^1 (le ruban simple $S^1 \times \mathbb{R}$ est par contre un fibré trivial).

Il existe une notion assez évidente d'*équivalence (fibrée)* entre fibrés différentiels, et on appelle *fibré trivialisable* tout fibré équivalent à un fibré produit, dit aussi fibré trivial. On peut dire qu'un fibré général est, localement, comme un produit (à difféomorphismes locaux préservant la projection canonique près), mais pas globalement équivalent à un produit en général.

Chaque section $\sigma \in \Gamma(E)$ est définie localement par une application. Il en résulte que l'espace $\Gamma(E)$ des sections est localement équivalent à un espace d'applications $\mathcal{C}^\infty(W, F)$, pour les différents ouverts de trivialisation $W \subset B$. Il en résulte facilement que $\Gamma(E)$ est un espace métrisable complet, et donc un espace de Baire. Dans le cas d'un fibré différentiel linéaire, $\Gamma(E)$ est même un espace de Fréchet (voir [1] par exemple pour le cas des fibrés différentiels linéaires à base compacte).

Remarque 2.13. Le fait que l'espace des champs de vecteurs $\mathcal{X}^\infty(M)$ est un espace de Fréchet peut se voir facilement de la façon suivante. Réalisons M comme sous-variété d'un espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Pour chaque $x \in M \subset \mathbb{R}^N$, l'espace tangent

T_xM en x est alors un sous-espace de $\mathbb{R}^N$, et un champ de vecteurs est le graphe d'une application de M à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Il s'ensuit que $\mathcal{X}^\infty(M)$ peut se voir comme un sous-espace vectoriel *fermé* dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^N)$. C'est donc aussi un espace de Fréchet et en particulier c'est un espace de Baire. Il est facile de vérifier que la topologie ainsi définie coïncide avec celle que l'on peut définir directement à l'aide des cartes de M.

Revenons à un fibré différentiel général (E, B, π, F). Comme les sections sont représentées localement par des applications d'ouverts de B dans F, il est facile de définir des k-jets de germes de sections au point $x \in B$: deux germes de sections en x ont même k-jet, si leurs fonctions représentatives, dans une même trivialisation, ont même k-jet ; le k-jet d'une section en x est alors la classe pour cette relation d'équivalence. On désigne par J^kE l'ensemble de tous les k-jets de sections. Cet ensemble peut être muni d'une structure de variété avec des cartes à valeurs dans $J^k_{p,q}$, si p est la dimension de B et q celle de F. J^kE est l'espace total d'un fibré différentiel dont la base est B, et la projection est l'application π^k qui associe, à chaque k-jet, le point de B où ce jet est défini. La fibre de ce fibré est elle-même un fibré différentiel de base F et de fibre d'espace $P^k_{p,q}$.

Si σ est une section du fibré, le k-jet de cette section est l'application $j^k\sigma$ qui associe à chaque point $x \in B$ le k-jet $j^k\sigma(x)$ de σ en x. Ce k-jet $j^k\sigma$ est une section du fibré J^kE. Nous pouvons maintenant énoncer la forme générale du théorème de transversalité de Thom (la preuve est tout à fait comparable à celle que nous avons esquissée pour le théorème 2.4) :

***Théorème 2.5* (Forme générale du théorème de transversalité de Thom).**
Soit (E, B, π, F) un fibré différentiel de classe $\mathcal{C}^\infty$ quelconque et S une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de J^kE. Soit $\mathcal{T}(S)$ le sous-ensemble de $\Gamma(E)$ des sections σ telles que $j^k\sigma$ soit transverse à S. Alors $\mathcal{T}(S)$ est un sous-ensemble résiduel de $\Gamma(E)$. Autrement dit, la propriété pour une section σ du fibré d'avoir un k-jet $j^k\sigma$ transverse à S est générique dans $\Gamma(E)$.

Remarque 2.14. Le théorème 2.4 correspond au cas d'un fibré trivial de base M, de fibre N, d'espace total $M \times N$, et de projection canonique de $M \times N$ sur M. Les sections de ce fibré étant les graphes des applications de M dans N, on peut identifier l'espace des sections avec l'espace $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ pour obtenir l'énoncé du théorème 2.4.

Le théorème 2.5 permet d'obtenir des propriétés génériques des champs de vecteurs (c'est-à-dire correspondant à un ensemble résiduel de l'espace de Baire $\chi^\infty(M)$ des champs de vecteurs sur une variété M). Par exemple, on peut considérer la sous-variété $S \subset TM$ égale à l'image de la section nulle. En conséquence

du point (1) de la remarque 2.10, il est clair que le champ de vecteurs X est transverse en $x \in M$ à la section nulle, si et seulement s'il a un point singulier non dégénéré en x (toutes les valeurs propres de son spectre sont non nulles). En conséquence, on a le corollaire suivant du théorème 2.5 :

Corollaire 2.2. *Sur une variété M, les champs de vecteurs ont génériquement tous leurs points singuliers non dégénérés.*

Remarque 2.15. Lorsque la base B du fibré est une variété compacte, l'ensemble résiduel $\mathcal{T}(S)$ des sections transverses du théorème 2.5 est un ouvert dense de $\Gamma(E)$. En fait, comme on l'a déjà fait remarquer dans le cas euclidien, on peut dissocier les propriétés d'ouverture et de densité : l'ensemble $\mathcal{T}(S)$ est ouvert pour la $\mathcal{C}^{k+1}$-topologie (car la transversalité de $j^k\sigma$ à S est stable pour une $\mathcal{C}^1$-perturbation de $j^k\sigma$, et donc pour une $\mathcal{C}^{k+1}$-perturbation de σ), et il est dense pour la $\mathcal{C}^\infty$-topologie. En fait, on peut introduire l'espace $\Gamma^\ell(E)$ des sections de classe $\mathcal{C}^\ell$ pour tout $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Cet espace est un espace de Baire. Si l'on se donne une sous-variété S de classe $\mathcal{C}^1$ dans J^kE, et si ℓ est tel que $k+1 \leq \ell \leq \infty$, l'ensemble des sections de classe $\mathcal{C}^\ell$, de k-jets transverses à S, est résiduel dans la $\mathcal{C}^\ell$-topologie.

2.6. Exemples de propriétés génériques

Tous les exemples de propriétés génériques sont obtenus comme application du théorème général 2.5. En voici quelques-uns qui seront repris dans les chapitres suivants.

1. *Points singuliers non dégénérés pour un champ de vecteurs.* Rappelons qu'un champ X sur une variété M a, en x_0, un point non dégénéré si, dans une carte dans laquelle $x_0 = 0$, le champ a une partie linéaire inversible, ce qui signifie que $X(x) = A(x - x_0) + o(\| x - x_0 \|)$, avec A matrice inversible (de rang maximum). Nous avons vu que cette condition s'interprète de la façon suivante : X, considéré comme section du fibré tangent TM, est transverse en x_0 à la section nulle.

2. *Points singuliers hyperboliques pour un champ de vecteurs.* Nous introduirons dans la définition 3.1 la notion d'être hyperbolique pour un point singulier de champ de vecteurs. Cette notion est plus fine que celle d'être non dégénérée. On dit qu'un point singulier x_0 du champ X est hyperbolique si toutes les valeurs propres de la partie linéaire A de X en x_0 ont une partie réelle différente de 0.

Soit $J^1V(n)$ l'espace des champs affines de la forme $a + Ax$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice d'ordre n. On définit par $\Sigma \subset J^1V(n)$ l'ensemble des champs linéaires non hyperboliques (avec $a = 0$ et A non hyperbolique). Alors, Σ est la réunion de deux ensembles algébriques de codimension supérieure ou égale à $n + 1$, à savoir, l'un est défini par la condition que la matrice A possède une valeur propre nulle, et l'autre par la condition que deux des valeurs propres de A sont des nombres imaginaires conjugués. Comme Σ est de codimension $n + 1$, on a :

$$j^1X \overline{\pitchfork} \Sigma \Leftrightarrow j^1X \cap \Sigma = \emptyset.$$

La transversalité est ici réalisée de façon triviale : les points singuliers de X sont hyperboliques parce que génériquement le 1-jet j^1X ne rencontre pas l'ensemble Σ. La propriété de n'avoir que des points singuliers hyperboliques est donc générique.

3. *Points fixes non dégénérés pour un difféomorphisme.* Soit $f \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ l'espace des difféomorphismes d'une variété M. Soit x_0 un point fixe de f. Ce point fixe est non dégénéré si toutes les valeurs propres de la partie linéaire de f en x_0, dans une carte quelconque, ont un module différent de 1. Soit $\Delta \subset M \times M$ la diagonale définie par $\Delta = \{(x, x) \in M \times T \mid x \in M\}$. On associe à f son application graphe : $M \mapsto M \times M$ définie par $\mathrm{Graphe}_f(x) = (x, f(x))$. Alors l'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f est obtenu comme contre-image de Δ par l'application Graphe_f (figure 2.3) :

$$\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Graphe}_f^{-1}(\Delta).$$

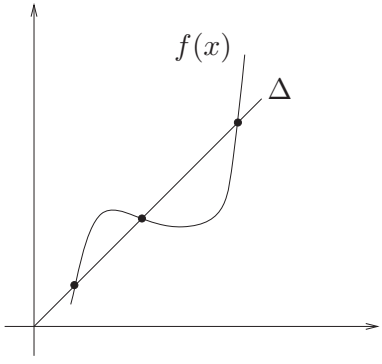


Figure 2.3. Les points fixes sont dessinés par des cercles pointés.

Il est facile de vérifier que x est un point fixe non dégénéré de f si et seulement si l'application Graphe_f est transverse à Δ en x. Comme Δ est une

sous-variété du fibré trivial $M \times M \mapsto M$, on peut appliquer le théorème 2.4 avec $M = N$ et $k = 0$.

4. De la même façon qu'au point 2, on montre que la propriété de n'avoir que des *points périodiques hyperboliques* est générique dans $\mathrm{Diff}^\infty(\Sigma)$. Par le point 3, on sait que l'ensemble $\mathcal{P}^1$ des difféomorphismes dont tous les points fixes sont hyperboliques est résiduel. De la même façon, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}^1(f^k)$ des difféomorphismes, dont tous les points k-périodiques sont hyperboliques, est générique. Donc, finalement, l'ensemble $\mathcal{P} = \bigcap_k \mathcal{P}_k$ des difféomorphismes dont tous les points périodiques sont hyperboliques, est résiduel.

5. On a le même résultat pour les *orbites périodiques hyperboliques* des champs (on utilise les applications de Poincaré).

2.7. Remarques finales

2.7.1. Intérêt et limite du théorème de transversalité

Nous avons vu que le théorème de transversalité de Thom est un outil très puissant pour obtenir des propriétés génériques. Une conséquence intéressante du théorème (qui a été très exploitée par Thom lui-même), est que toute section générique, au sens du théorème 2.5, hérite d'une sous-variété de la base B du fibré, qui lui est naturellement associée : $S(\sigma) = (j^k)^{-1}(S)$. En effet, puisque $j^k\sigma$ est une application transverse à la sous-variété S de J^kE, il suit, du théorème I-2.4, que $S(\sigma)$ est aussi une sous-variété de B et que la codimension de $S(\sigma)$ dans B est égale à la codimension de S dans J^kE. Un cas particulier remarquable est celui où cette codimension est strictement supérieure à la dimension de B. Dans ce cas, *les sections génériques ne rencontrent pas* S et donc génériquement $S(\sigma) = \emptyset$. En fait, le cas général peut se réduire à ce cas particulier, comme l'a montré J. Mather. En effet, si S est une sous-variété de $J^k\Gamma(E)$, il existe un ensemble $\Sigma(S) \subset J^{k+1}\Gamma(E)$ tel que si σ est une section, son k-jet $j^k\sigma$ est transverse à S si et seulement si son $(k+1)$-jet ne rencontre pas $\Sigma(S)$. Et Mather a montré précisément que, quelle que soit la sous-variété $S \subset J^kE$, S est une union dénombrable de sous-variétés de $J^{k+1}E$ telles que chacune d'elles a une codimension strictement supérieure à la dimension de B.

Les propriétés exprimées à travers le théorème de transversalité sont évidemment des propriétés locales de la section, propriétés exprimables en chaque point de la base B : par exemple, la propriété d'avoir des points singuliers de type de Morse pour une fonction, la propriété d'avoir des zéros non dégénérés pour un

champ de vecteurs. Or, il peut y avoir des propriétés dont l'expression ne peut pas se traduire directement par une propriété locale d'un k-jet de la section. Voici quelques exemples :

1. *On peut demander à une fonction de Morse f sur une variété M d'avoir des valeurs critiques deux à deux distinctes* (on parle alors de *bonne fonction de Morse* : si $x_0 \neq x_1$ sont deux points critiques, on demande que $f(x_0) \neq f(x_1)$). On peut montrer (et c'est facile) que la propriété d'être une bonne fonction de Morse est une propriété générique, mais cela n'est pas une conséquence directe du théorème 2.4. En fait, on peut exprimer la condition de séparation des valeurs critiques par une condition de transversalité portant sur l'application $f \times f : M \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et il faut généraliser le théorème de transversalité dans ce contexte dit de « singularité au but » (voir [12] par exemple).
2. *On s'intéresse à une propriété définie de façon récurrente :* une première application du théorème de transversalité 2.5 permet de définir une sous-variété $S(\sigma)$ comme plus haut. On veut ensuite que $\sigma|_{S(\sigma)}$ ait à son tour une propriété générique, et ainsi de suite. C'est, par exemple, la théorie des singularités de Thom-Boardman pour les applications entre variétés (on reviendra plus loin sur la signification précise du terme *singularité*). Comme la sous-variété $S(\sigma)$ n'est pas indépendante de la donnée de σ, on ne peut pas appliquer directement le théorème de transversalité à l'étude de ces singularités dites *secondaires*.

   À titre de plus simple exemple, on peut citer les singularités de Whitney pour les applications plan sur plan $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Pour une telle application, le rang de la différentielle est génériquement de 1 au plus, le long d'une courbe régulière $\Sigma^1(F)$ du plan de départ. En chaque point $x \in \Sigma^1(F)$ est définie une droite : $\mathrm{Ker}(dF(x))$. On demande à ce que cette droite devienne génériquement tangente à $\Sigma^1(F)$ en des points isolés. Ces points sont les singularités de type fronce. Les autres points de $\Sigma^1(F)$ sont les singularités de type pli (voir chapitre 5).

   La façon de résoudre la difficulté a été d'introduire des sous-variétés ad hoc, dans les espaces de jets, telles que la transversalité à ces sous-variétés traduise la généricité. On revient alors à une application directe du théorème de transversalité, mais au prix d'une construction très technique.
3. On a vu, dans la partie II du tome 1, que beaucoup des propriétés d'un champ de vecteurs X s'expriment à travers son flot, après intégration du champ. Par exemple, la simple existence d'une orbite périodique et, *a fortiori*, les propriétés des orbites périodiques. Rappelons que la façon naturelle

d'étudier les propriétés d'une orbite périodique de X est de considérer une application de retour h_Σ^X associée à une transversale locale Σ. Pour simplifier, supposons que la section soit globale. On commencera par étudier les propriétés génériques des difféomorphismes h sur la variété Σ ; il restera à montrer que ces propriétés se relèvent, par suspension (voir le chapitre II-6), en des propriétés génériques des champs (avec la difficulté évidente que tous les champs de vecteurs n'admettent pas Σ comme section globale).

4. Il peut se faire que les propriétés en vue s'expriment à travers des sous-variétés associées à notre objet initial (c'était déjà le cas pour les singularités secondaires d'applications évoquées plus haut, mais cela est plus systématique dans le cas des dynamiques). Citons, par exemple, les variétés invariantes des points hyperboliques de champs de vecteurs, que nous introduirons dans le chapitre 3. Comme on l'a vu à l'exemple 2 du paragraphe 2.6, une application directe du théorème de tranversalité permet de montrer que tous les points singuliers d'un champ de vecteurs sont génériquement hyperboliques. La propriété selon laquelle les variétés invariantes sont deux à deux transverses est aussi une propriété générique. C'est le théorème de Kupka-Smale. Cette propriété que nous n'établirons pas, ne peut pas se déduire d'une application directe du théorème de transversalité.
5. Enfin, certaines propriétés des systèmes dynamiques sont globales par définition, car elles s'expriment à travers des grandeurs obtenues par moyennisation sur la dynamique : grandeurs thermodynamiques telles que les diverses entropies associées aux systèmes dynamiques (voir [8] par exemple).

2.7.2. Topologie de Whitney

Lorsque la variété n'est pas compacte (par exemple un ouvert euclidien), il est aussi possible d'introduire sur les espaces fonctionnels considérés une topologie plus fine que la topologie de convergence sur les compacts : c'est la *topologie de Whitney*. Prenons l'exemple de l'espace $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert euclidien U. Si $\delta(x)$ est une fonction *continue* et strictement positive sur U et f une fonction $\mathcal{C}^k$, soit l'ensemble

$$\mathcal{W}_\delta^k(f) = \left\{ g \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}) \mid \left| \frac{\partial^{|j|} g}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x) \right| \leq \delta(x), \quad \forall x \in U, \mid j \mid \leq k \right\}.$$

Si k est fini, on définit la topologie de Whitney de classe $\mathcal{C}^k$ comme étant la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages ouverts de f est engendré par les ensembles $\mathcal{W}_\delta^k(f)$, où δ est n'importe quelle fonction continue et strictement positive. Si $k = \infty$, on prend le système fondamental engendré par les

$\mathcal{W}^\ell_\delta(f)$, pour toutes les fonctions δ continues et strictement positives, et pour tous les $\ell \in \mathbb{N}$. Il est facile d'étendre cette définition aux divers espaces fonctionnels introduits ci-dessus (voir [30] par exemple).

Il est clair que la topologie de Whitney de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est strictement plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts en classe $\mathcal{C}^k$. On peut montrer que les espaces fonctionnels avec leur topologie de Whitney sont des espaces de Baire, et il est donc légitime d'utiliser cette topologie pour introduire la notion de généricité. L'inconvénient de cette topologie est qu'elle n'est pas définie par semi-normes et n'est pas une topologie de Fréchet. On ne peut pas travailler avec elle en utilisant uniquement des suites. Il y a d'ailleurs très peu de suites convergentes au sens de Whitney : si une suite $(f_n)_n$ converge vers 0 au sens de cette topologie en classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe un compact K contenant le support de toutes les fonctions f_n pour n assez grand. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'une suite $(f_n)_n$ converge vers 0 et qu'il n'existe pas de compact qui contienne tous les supports des f_n. On peut alors trouver une suite (x_n) de U, convergente vers le bord ∂U, telle que $f_n(x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est alors facile de construire sur U une fonction δ continue et strictement positive telle que $\delta(x_n) < |f_n(x_n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout n, on a $f_n \notin \mathcal{W}^0_\delta(f)$, qui est un voisinage de 0 de chaque topologie de Whitney de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, ce qui implique que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0 pour aucune de ces topologies (voir par exemple le lemme 3.4, p. 27 de [45]), d'où la contradiction.

Par contre, certains résultats s'énoncent plus commodément dans la topologie de Whitney. Par exemple, les fonctions de Morse sur une variété quelconque M forment un ouvert dense dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ muni de la topologie de Whitney de classe $\mathcal{C}^2$.

Enfin, remarquons que si M est une variété compacte, les topologies de Whitney et celle de la convergence uniforme sur les compacts coïncident sur $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^p)$, ou bien sur $\chi^k(M)$, et plus généralement sur tous les espaces de sections de fibrés différentiels $\Gamma^k(E)$.

2.7.3. Notion de singularité

La sous-variété $S \subset J^k\Gamma(E)$ du théorème 2.5 n'a d'intérêt que si elle est définie de façon naturelle. La manière précise de définir cette notion de naturalité est de faire intervenir le *pseudo-groupe structural des difféomorphismes du fibré*. Chaque fibré différentiel est équipé d'un tel pseudo-groupe dont la définition dépend du fibré. Dans le cas le plus général, le pseudo-groupe du fibré (E, π, B, F) est formé par les paires de difféomorphismes locaux (φ, ψ), avec $\varphi : U \mapsto E$, $\psi : W \mapsto B$, où W et U sont des ouverts de E et B respectivement ; on suppose que la paire (φ, ψ)

est fibrée au sens que $\pi(U) = W$ et que $\pi \circ \varphi = \psi \circ \pi$. Dans des cas particuliers, le pseudo-groupe naturel est plus restreint.

Par exemple, pour le cas trivial d'un fibré d'espace total produit $M \times N$ (dont les sections sont les applications de M dans N), on peut choisir le pseudo-groupe formé par les paires (Φ, ψ), où Φ est un difféomorphisme local de N et ψ est un difféomorphisme local de M. L'action de ce pseudo-groupe définit, ce qui est appelé, l'*équivalence droite-gauche* entre applications de M dans N. En fait, on considère aussi l'action générale introduite plus haut. Ici, elle consiste à considérer les difféomorphismes locaux φ fibrés de la forme $(\varphi(x, y), \psi(x))$. L'action de ce pseudo-groupe définit, ce qui est appelé, l'*équivalence de contact*.

Pour le fibré tangent à une variété, on considère le pseudo-groupe tel que le difféomorphisme φ, dans l'espace total, est défini par relèvement du difféomorphisme local ψ sur la variété M : on prend donc $U = \pi^{-1}(W)$ et $\varphi(v) = (\psi(\pi(v)), d\psi(\pi(v))[v])$. Une définition similaire est appliquée à tous les fibrés différentiels naturellement associés aux variétés : fibrés de formes différentielles, de métriques riemanniennes, etc. Nous n'en parlerons pas plus ici car leur considération sort du cadre de cet ouvrage. Chaque élément du pseudo-groupe envoie une section locale sur une autre section locale, et, pour tout k, ce difféomorphisme se relève en un difféomorphisme local dans l'espace des k-jets de sections $J^k E$. Nous pouvons maintenant donner la définition de *singularité* telle qu'elle a été introduite par Thom :

Définition 2.8. On appelle singularité d'ordre k, pour l'espace des sections d'un fibré différentiel, toute sous-variété de l'espace des k-jets de sections $J^k E$, invariante par l'action des relevés dans les k-jets de sections des éléments du pseudo-groupe structural.

La section nulle est un exemple trivial d'une singularité d'ordre 0 dans le fibré tangent TM d'une variété M.

Une propriété de base du pseudo-groupe structural est d'agir transitivement dans l'espace total et donc dans la base. Une conséquence facile de cette transitivité est que toute singularité a localement une structure produit. Cela signifie que, si $J^k F$ est la fibre type du fibré des k-jets $\pi^k : J^k E \mapsto B$, il existe une sous-variété $\Sigma \subset J^k F$, et l'on peut choisir un recouvrement $\{U_i\}$ de la base B par des ouverts de trivialisation (c'est-à-dire qu'il existe, pour chaque i, un difféomorphisme de trivialisation $\Lambda_i : \pi^{-1}(U_i) \mapsto U_i$ tel que $\Lambda_i^{-1}(S \cap (\pi^k)^{-1}) = U_i \times \Sigma$). La conséquence est la suivante : au-dessus de chaque ouvert de trivialisation U_i, une section quelconque σ est donnée comme graphe d'une application de U_i dans la fibre type F, et la transversalité de σ à S au-dessus des points de U_i est équivalente

à la transversalité du k-jet $j^k f_i$ à $\Sigma \times \{x\}$, c'est-à-dire à la transversalité de la fonction $T^k f$ à Σ (voir la remarque 2.11).

Voici quelques exemples de singularités pour les exemples que nous avons déjà étudiés : la section nulle, dans le fibré tangent, est une singularité de l'espace des 0 jets (le fibré tangent lui-même) ; l'ensemble des différentielles nulles de fonctions, aux points d'une variété M, est une singularité d'ordre 1 du fibré trivial $M \times \mathbb{R}$ (comme on l'a montré plus haut, la transversalité du 1-jet d'une fonction, à cette singularité, est équivalente au fait que la fonction est de Morse). L'« invariance de l'action des relevés dans les k-jets de sections des éléments du pseudo-groupe structural » évoquée dans la définition 2.8, correspond ici au fait trivial suivant : si $df(x) = 0$, et si ψ et ϕ sont des difféomorphismes définis au voisinage de $x \in M$ et $f(x) \in \mathbb{R}$ respectivement, alors $d(\phi \circ f \circ \psi)(x) = 0$. Nous rencontrerons beaucoup d'exemples de singularités dans les chapitres 5 et 6.

This page intentionally left blank

3

ÉTUDE LOCALE DES SINGULARITÉS HYPERBOLIQUES

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement local des difféomorphismes et des champs de vecteurs au voisinage des points fixes ou singuliers les moins dégénérés (les points hyperboliques). Nous étudierons parallèlement le comportement local des difféomorphismes et des champs de vecteurs au voisinage de leurs orbites périodiques hyperboliques.

Sauf mention expresse du contraire, tous les objets considérés (variétés, champs de vecteurs, difféomorphismes...) sont supposés être de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette hypothèse est faite dans un souci de simplicité, car tous les résultats établis ont aussi des versions en classe de différentiabilité finie.

3.1. Points singuliers et points fixes hyperboliques

Soit X un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n et un point p_0 tel que $X(p_0) = 0$ (donc p_0 est un point singulier). On a introduit, au paragraphe II-4.4, le spectre des valeurs propres en p_0 de X de la façon suivante. On choisit un voisinage U de p_0 muni de la coordonnée $x \in \mathbb{R}^n$, et tel que $p_0 = \{x = 0\}$. Si

$$X(x) = Ax + o(\|x\|),$$

alors *le spectre des valeurs propres* en p_0 de X est l'ensemble des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, de la matrice $A = dX(p_0)$. Rappelons que ce spectre est indépendant du choix de la coordonnée locale x.

Définition 3.1. On dit que p_0 est un zéro (ou point singulier) *hyperbolique* du champ de vecteurs X si toutes les valeurs propres de $A = dX(p_0)$ ont une *partie réelle* non nulle (on dit que A est une *matrice hyperbolique*) (figure 3.1).

En dimension 2, un point singulier est dit *semi-hyperbolique* si A a une valeur propre nulle et une valeur propre (nécessairement réelle) non nulle.

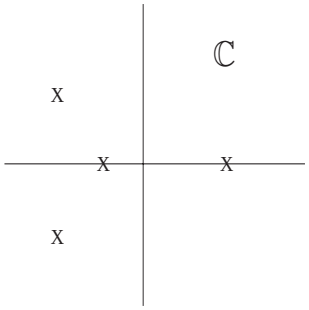


Figure 3.1. Exemple d'un spectre hyperbolique d'un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^4$. Les croix indiquent les valeurs propres.

Pour un difféomorphisme, on peut écrire dans la coordonnée locale x :

$$f(x) = Bx + o(\|x\|),$$

où $B = df(p_0)$ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ (matrice inversible). On a la définition suivante :

Définition 3.2. Un point fixe p_0 d'un difféomorphisme f est hyperbolique si toutes les valeurs propres du spectre de l'automorphisme $B = df(x_0)$ ont une *valeur absolue* différente de 1. De même, on dira qu'un point p_0, k-périodique de f, est hyperbolique si p_0 est un point fixe hyperbolique de f^k (puissance d'itération). Enfin, on dira qu'une orbite périodique γ d'un champ de vecteurs est hyperbolique en p_0 si, Σ étant une section locale et W un voisinage de p_0 dans Σ, l'application de Poincaré $h : W \mapsto \Sigma$ est hyperbolique en p_0.

Remarque 3.1.

1. La notion d'hyperbolicité est locale car elle ne dépend que du spectre des valeurs propres au point p_0. Rappelons que ce spectre est indépendant de la coordonnée locale choisie. De même, dans la définition 3.2, l'hyperbolicité

de γ est indépendante de la section et de sa paramétrisation : un changement de la section ou de sa paramétrisation transforme h par conjugaison différentiable, ce qui préserve le spectre des valeurs propres de h en p_0 (voir le paragraphe II-6.1).

2. L'application exponentielle matricielle introduite dans le paragraphe II-1 : $A \mapsto e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ associe à chaque matrice $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ une matrice inversible $e^A \in \mathrm{Gl}(n)$. Si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ est le spectre des valeurs propres de A, le spectre de e^A est égal à $\{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\}$. Rappelons que le flot du champ de vecteurs linéaire X_A associé à A est égal à $\varphi_A(t,x) = e^{tA} \cdot x$. En conséquence, si le champ X_A admet l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ comme point singulier hyperbolique, le difféomorphisme linéaire $x \mapsto \varphi_A(t,x) = e^{tA} \cdot x$ (temps t du flot) admet l'origine comme point fixe hyperbolique pour tout $t \neq 0$. Plus généralement, remarquons aussi que si p est un zéro d'un champ X de flot $\varphi_X(t,x)$, ce point p est point fixe du difféomorphisme $x \mapsto \varphi_X(t,x)$, pour tout t. D'autre part, si A est la partie linéaire de X au point p, le flot linéaire $e^{tA} \cdot x$ est la partie linéaire du flot $\varphi_X(t,x)$. Donc, si p est un point singulier hyperbolique du champ X, ce point est un point fixe hyperbolique du difféomorphisme $x \mapsto \varphi_X(t,x)$ pour tout $t \neq 0$. Remarquez qu'un automorphisme B est dans l'image de l'exponentielle si et seulement si $\mathrm{Det}(B) > 0$, c'est-à-dire si B préserve l'orientation.

3. Il est facile de voir que l'ensemble des matrices hyperboliques est un ensemble ouvert et dense de $\mathrm{Mat}(n,n)$. Il s'ensuit que l'on peut approcher le champ $X(x) = Ax + o(\|x\|)$ par un champ $X'(x) = A'x + o(\|x\|)$ avec A' hyperbolique et $||A - A'||$ arbitrairement petit : si U est un voisinage ouvert de p_0 sur lequel X est défini, les champs X et X' seront alors aussi proches l'un de l'autre que voulu dans la topologie $\mathcal{C}^1$ des champs de vecteurs de U, topologie qui a été définie dans le chapitre 2. On a vu dans ce chapitre (item 2, paragraphe 2.6) que cela implique que tout champ de vecteurs sur une variété M peut être approché en topologie $\mathcal{C}^1$ par un champ ayant tous ses points singuliers hyperboliques. On peut faire une remarque similaire pour les points périodiques de difféomorphismes.

Notre but est de montrer que les points singuliers hyperboliques de champs de vecteurs, et les orbites périodiques hyperboliques de difféomorphismes, sont localement linéarisables, c'est-à-dire que le champ (ou le difféomorphisme) se comporte comme sa partie linéaire au voisinage d'un tel point. Cela sera d'autant plus intéressant que l'on connaît complètement le comportement des champs de vecteurs et difféomorphismes linéaires hyperboliques, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre II-2 et allons le voir en détail maintenant.

3.2. Champs et difféomorphismes linéaires hyperboliques

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la classification topologique des champs de vecteurs et des difféomorphismes linéaires hyperboliques. On trouvera plus de précisions dans [52].

On considère, pour commencer, les champs de vecteurs. Supposons que A soit une matrice $n \times n$ hyperbolique (toutes ses valeurs propres sont en dehors de l'axe imaginaire). On peut décomposer $\mathbb{R}^n$ sous la forme :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u,$$

où E^s est la somme directe des espaces associés aux valeurs propres de partie réelle strictement négative (c'est *l'espace propre stable*), et E^u est la somme directe des espaces associés aux valeurs propres de partie réelle strictement positive (c'est *l'espace propre instable*).

Comme $A(E^s) \subset E^s$ et $A(E^u) \subset E^u$, c'est-à-dire que E^s et E^u sont des sous-espaces invariants par A, il en résulte que $A = A_s \oplus A_u$ avec $A_s = A\,|_{E^s}$ et $A_u = A\,|_{E^u}$. Cela signifie que, sur l'espace $E^s \oplus E^u$, on a la décomposition de la matrice A en produit direct suivant :

$$A = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}.$$

C'est la forme *normale* de la matrice A dans ce cas particulier (voir [27] p. 190-193 pour la définition).

Définition 3.3. Si $E^u = \{0\}$, on dit que le champ est un champ linéaire hyperbolique *stable ou contractant* ou bien un *puits* : son spectre de valeurs propres est situé à gauche de l'axe imaginaire : $i\mathbb{R}$. Si $E^s = \{0\}$, on dit que le champ est un champ linéaire hyperbolique *instable ou dilatant* ou bien une *source* : son spectre de valeurs propres est situé à droite de l'axe $i\mathbb{R}$. Si ni E^s ni E^u ne sont réduits à $\{0\}$, on dit que le champ est de *type selle hyperbolique.*

Si p_0 est un point singulier hyperbolique d'un champ de vecteurs sur une variété, on dira que le germe du champ en p_0 est un champ contractant, dilatant ou un point de selle hyperbolique selon la nature de sa partie linéaire.

Soit $X^s_A(x_s) = A_s x_s$ et $X^u_A(x_u) = A_u x_u$ les champs linéaires définis sur E^s et E^u respectivement (on note par x_s, x_u les coordonnées dans E^s, E^u). Si $\tilde{A}_s, \tilde{A}_u$ sont les matrices de $E^s \oplus E^u \approx \mathbb{R}^n$ égales à $A_s \oplus \{0\}$ et $\{0\} \oplus A^u$, on peut aussi

introduire les champs $\tilde{X}^s_A(x) = \tilde{A}_s x$ et $\tilde{X}^u_A(x) = \tilde{A}_u x$ sur $E^s \oplus E^u$. On peut représenter le champ linéaire $X_A(x) = Ax$ comme la somme des deux champs $\tilde{X}^s_A(x) = \tilde{A}_s x$ et $\tilde{X}^u_A(x) = \tilde{A}_u x$ (figure 3.2). Ces champs commutent au sens que les dérivations de Lie commutent : $L_{\tilde{X}^s_A} \circ L_{\tilde{X}^u_A} = L_{\tilde{X}^u_A} \circ L_{\tilde{X}^s_A}$, ce qui est équivalent à la commutation des matrices : $\tilde{A}_s \circ \tilde{A}_u = \tilde{A}_u \circ \tilde{A}_s$.

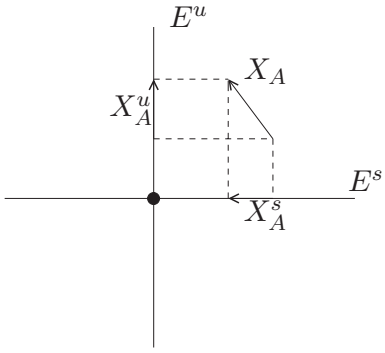


Figure 3.2

Soit le flot $\varphi_A(t,x)$ du champ X_A et $x = (x_u, x_s)$. Alors, en désignant par $\varphi^s_A(t,x_s)$ le flot du champ X^s_A et par $\varphi^u_A(t,x_u)$ le flot du champ X^u_A, on a :

$$\varphi_A(t,x) = (\varphi^s_A(t,x_s), \varphi^u_A(t,x_u)).$$

On peut dire que le flot de X_A dans $E^s \oplus E^u$ est le produit direct des flots de X^s_A et X^u_A définis respectivement dans E^s et E^u. Cela est complètement équivalent à la commutation des champs $\tilde{X}^s_A$ et $\tilde{X}^u_A$ dont les flots sont respectivement égaux à $\varphi^s_A(t,x_s) \oplus \{0\}$ et $\{0\} \oplus \varphi^u_A(t,x_u)$. Géométriquement, cela signifie que le flot $\varphi_A(t,m)$ laisse invariants les feuilletages définis par les plans parallèles à E^s et E^u, ou encore que φ_A envoie tout plan parallèle à E^s sur un autre plan parallèle à E^s et aussi tout plan parallèle à E^u sur un autre plan parallèle à E^u (figure 3.3). Pour nous, *feuilletage* signifie ici tout simplement une collection de plans parallèles. On reviendra sur la notion de feuilletage dans la remarque 3.12 ci-après.

Il suffira donc d'étudier séparément les flots de X^s_A et X^u_A et de faire leur produit direct pour connaître tout le flot du champ X_A. Comme $-X^u_A$ est un champ hyperbolique stable, il suffit finalement d'étudier les champs linéaires hyperboliques stables, ce que l'on va réaliser dans le prochain paragraphe.

Une décomposition similaire peut se faire pour les difféomorphismes linéaires. Supposons donc que B soit une matrice d'automorphisme linéaire hyperbolique de $\mathbb{R}^n$ (toutes ses valeurs propres sont non nulles et en dehors du cercle unité). On peut décomposer $\mathbb{R}^n$ sous la forme :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u,$$

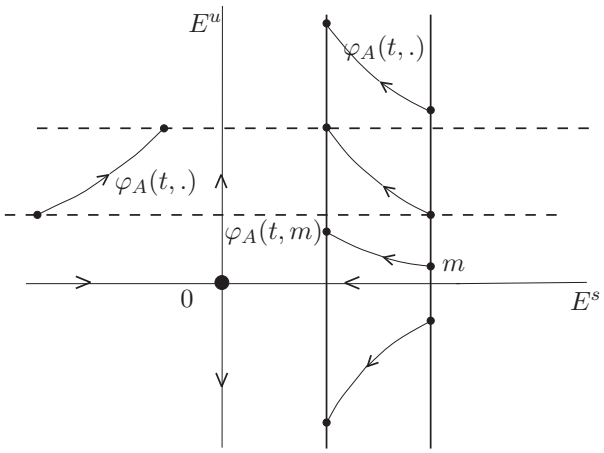


Figure 3.3

où E^s est la somme directe des espaces associés aux valeurs propres de module strictement plus petit que 1 (c'est *l'espace propre stable*), et E^u est la somme directe des espaces associés aux valeurs propres de module strictement plus grand que 1 (c'est *l'espace propre instable*). La matrice B se décompose en un produit direct :

$$B = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ 0 & B_u \end{pmatrix},$$

où B_s est une matrice inversible de E^s de valeurs propres strictement plus petites que 1 en module et B_u est une matrice inversible de E^u de valeurs propres strictement plus grandes que 1 en module.

Définition 3.4. Si $E^u = \{0\}$, on dit que le difféomorphisme est une *contraction* linéaire hyperbolique ou bien un *puits* : son spectre de valeurs propres est situé strictement à l'intérieur du cercle unité. Si $E^s = \{0\}$, on dit que le difféomorphisme est une *dilatation* (ou une expansion) linéaire hyperbolique ou bien une *source* : son spectre de valeurs propres est situé strictement à l'extérieur du cercle unité. Si E^s et E^u ne sont pas réduits à $\{0\}$, on dit que le difféomorphisme est un difféomorphisme de type *selle hyperbolique.*

Si p_0 est un point fixe hyperbolique de difféomorphisme, on dira que le germe du difféomorphisme en p_0 est une contraction, une dilatation ou un point de selle hyperbolique selon la nature de sa partie linéaire.

En utilisant la décomposition en produit direct, on remarque qu'il suffit d'étudier le cas des contractions hyperboliques, ce que l'on va faire dans le prochain paragraphe.

3.2.1. Champs contractants et contractions hyperboliques

Nous allons considérer le problème de la classification des points singuliers contractants hyperboliques de champs de vecteurs et des points fixes contractants hyperboliques des difféomorphismes, directement dans le cas non linéaire car il ne présente pas de difficultés supplémentaires.

Nous commençons par le cas des champs de vecteurs. Considérons donc un champ de vecteurs X, défini sur une variété de dimension n. Soit p_0 un point singulier de type contraction hyperbolique. Au lemme II-7.5, on a montré que l'on peut choisir une coordonnée locale x telle que $p_0 = \{x = 0\}$ et que la partie linéaire de X soit une matrice A qui vérifie :

$$\langle Ax, x\rangle \leq -\mu||x||^2, \tag{3.1}$$

pour une constante $\mu > 0$, où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $||\cdot||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.2. L'inégalité (3.1) implique que le champ linéaire d'équation $\dot{x} = Ax$ est transverse, au sens de la définition I-2.16, aux sphères $S_\rho = \{||x|| = \rho\}$. Comme

$$\langle X(x), x\rangle = \langle Ax, x\rangle + O(||x||^3) \leq -\mu||x||^2(1 + O(||x||)),$$

le champ X est lui-même transverse aux sphères S_ρ, pour $\rho > 0$ assez petit.

Soit $\varphi_t^X(x)$ le flot de X. À la proposition II-7.1, on a déduit de l'inégalité (3.1) l'existence d'un voisinage, que l'on va supposer être le voisinage U, sur lequel :

$$||\varphi_t^X(x)|| \leq ||x||e^{-\mu t}, \tag{3.2}$$

ce qui vérifie la définition II-7.2 de la stabilité asymptotique. Nous allons montrer que :

Proposition 3.1. *Soit X un champ sur une variété de dimension n ayant un point singulier hyperbolique contractant p_0. Alors il existe un homéomorphisme H d'un voisinage W de $0 \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage de p_0, tel que $H(0) = p_0$, qui conjugue le flot $\varphi_t^-(x) = e^{-t}x$ du champ linéaire $X_-(x) = -x$ de $\mathbb{R}^n$, avec le flot $\varphi_t^X(x)$ de X. Si S_ρ est une sphère de rayon ρ assez petit, centrée à l'origine, et h est un homéomorphisme quelconque de S_ρ sur elle-même, on peut construire H tel que $H|_{S_\rho} = h$.*

En conséquence, tous les germes de champs de vecteurs en dimension n, de type contraction hyperbolique, sont topologiquement conjugués, et en particulier tout champ hyperbolique contractant est localement conjugué à sa partie linéaire.

On rappelle que conjugué signifie ici que : $H \circ \varphi_t^-(x) = \varphi_t^X(H(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in W$ tel que $\varphi_t^-(x) \in W$.

Démonstration. On peut supposer que X est défini sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ ($p_0 = \{x = 0\}$). On choisit $\rho_0 > 0$ tel que W, la boule de rayon ρ_0 en 0, soit contenue dans U. On va construire un homéomorphisme $H : W \mapsto W$, avec $H(0) = 0$.

L'inégalité (3.1) a pour conséquence que chaque orbite de X dans $W - \{0\}$ coupe transversalement en un point au plus chaque sphère de rayon ρ avec $0 < \rho \leq \rho_0$. Le champ X est transverse à la sphère en question (voir remarque 3.2) et le lemme II-7.8 précise que toute l'orbite est dans la boule de rayon ρ et de centre l'origine ; au total, chaque orbite de X coupe la sphère en un *point unique*. D'autre part, l'inégalité (3.2) implique que, pour tout point $x \in \partial W$, on a $\varphi_t^X(x) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, de façon uniforme en x. Si h est un homéomorphisme de S_ρ sur elle-même, on choisit : $H(x) = h(x)$ sur le bord $\partial W = S_\rho$. Ce choix impose alors la valeur de H sur $W - \{0\}$. En effet, tout point de $W - \{0\}$ s'écrit de façon unique sous la forme : $\varphi_t^-(m) = e^{-t}m$ avec $m \in \partial W$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Pour que H soit une conjugaison, on doit poser :

$$H(e^{-t}m) = \varphi_t^X(h(m)), \quad \forall m \in \partial W,\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

Il est facile de vérifier que H, ainsi défini, est un homéomorphisme de $W - \{0\}$ sur lui-même, qui conjugue le flot φ_t^- avec le flot φ_t^X. Posons $x = e^{-t}m$. Comme $||m|| = \rho_0$, on a $t = -\ln \frac{||x||}{\rho_0}$ et $m = \rho_0 \frac{x}{||x||}$. On en déduit que H est donné explicitement par :

$$H(x) = \varphi^X_{-\ln \frac{||x||}{\rho_0}} \left(h \left(\rho_0 \frac{x}{||x||} \right) \right) \tag{3.4}$$

pour tout $x \in W - \{0\}$. On prolonge H par $H(0) = 0$. Il reste à montrer que H est un homéomorphisme de W. Tout d'abord, montrons la continuité en 0. Cela suit immédiatement de l'application de l'inégalité (3.2) à la formule (3.4). En effet si $||x|| \leq \varepsilon$:

$$||H(x)|| \leq e^{\mu \ln ||x||} = ||x||^\mu \leq \varepsilon^\mu.$$

La construction de H est illustrée par la figure 3.4.

Maintenant H est une bijection de $\mathbb{R}^n$ qui envoie continûment la boule compacte W dans elle-même. C'est donc un homéomorphisme de W sur W, car *toute injection continue d'un compact est un homéomorphisme sur son image* (voir [22], corollaire 4.2.15, par exemple). ■

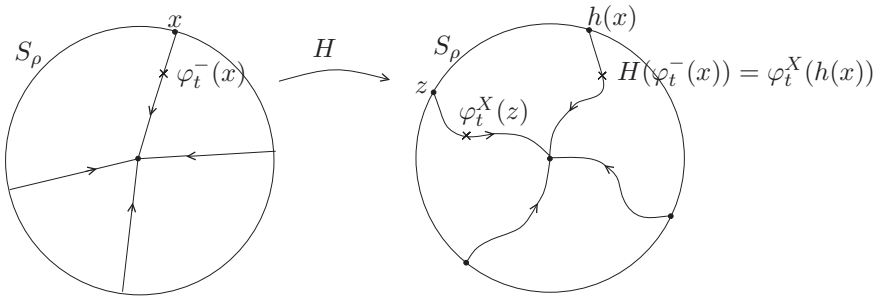


Figure 3.4

Remarque 3.3. La proposition 3.1 signifie qu'il existe un homéomorphisme H qui envoie toute trajectoire de X_- sur une trajectoire de X, en respectant le temps. Par ailleurs, on constate que l'on est dans les conditions de stabilité asymptotique pour les deux champs (théorème II-7.3), mais ici on améliore le résultat : non seulement le point hyperbolique p_0 est stable (asymptotiquement) mais il n'y a qu'un seul type possible, à un homéomorphisme près, de champ de vecteurs dont p_0 est point singulier hyperbolique de type contractant.

Enfin, constatons que l'on ne peut pas espérer mieux en général que l'existence d'un homéomorphisme H de conjugaison ; en effet, si H était de classe $\mathcal{C}^1$, l'isomorphisme linéaire $dH(0)$ serait une conjugaison linéaire des matrices A et $-\mathrm{Id}$ qui auraient alors nécessairement le même spectre de valeurs propres.

Nous allons maintenant considérer les contractions hyperboliques des difféomorphismes. Comme la question est locale, on peut supposer que le difféomorphisme est défini sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ et que 0 est le point fixe considéré.

Définition 3.5. On dira qu'un difféomorphisme f est une *contraction* en un point fixe p_0, s'il existe un voisinage compact $W \subset U$ de p_0, difféomorphe à une boule (ou disque), tel que $f(W) \subset \mathrm{Int}(W)$ et que $\cap_{n>0} f^n(W) = \{p_0\}$. ($p_0$ est alors un attracteur de f au sens défini dans le chapitre 1.)

La région compacte $N = W \setminus \mathrm{Int}(f(W))$ est appelée *domaine fondamental* de f (au voisinage de p_0) car chaque orbite de f par $x \in W$ coupe N en au moins un point (en un seul point de $\mathrm{Int}(N)$, ou bien en deux points de $\partial N = \partial W \cup f(\partial W)$ (figure 3.5)).

Remarque 3.4. La notion de domaine fondamental a déjà été rencontrée à la fin du paragraphe I-2.1.2 à propos de l'action des groupes discrets de difféomorphismes

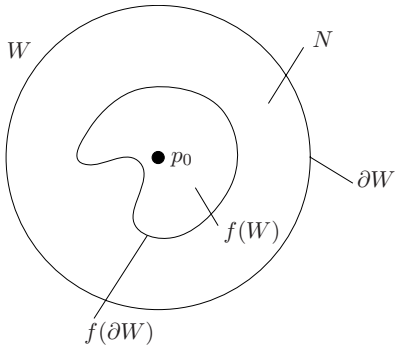


Figure 3.5. Domaine fondamental. W est tout l'intérieur du compact figuré par un disque, y compris son bord ∂W.

sur les variétés. Par exemple, le groupe $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{R}^2$ et on a défini le tore T^2 comme quotient de $\mathbb{R}^2$ par cette action ; le carré $C = [0,1] \times [0,1]$ est un domaine fondamental de l'action car chaque orbite de $\mathbb{Z}^2$ coupe le carré en un nombre fini de points (un seul point dans l'intérieur de C). Dans la définition 3.5, la notion de domaine fondamental est similaire, mais relative à l'action du semi-groupe des itérations positives de f agissant sur W.

Dans la définition 3.5, et bien que cela soit vrai, il n'est pas clair que N soit difféomorphe à l'anneau $S^{n-1} \times [0,1]$. Cela sera trivialement le cas dans la démonstration de la proposition 3.2, car on peut choisir pour W un disque euclidien tel que f soit dans ce disque, aussi proche que voulu d'une contraction linéaire. En dimension 2, on peut montrer assez facilement, par des arguments analogues à ceux utilisés dans la preuve du théorème de Jordan donnée dans le chapitre II-5, que N est difféomorphe à un anneau. Par contre, en dimension ≥ 3, on doit invoquer la réponse positive donnée à la conjecture de Poincaré sur les sphères ! Cette preuve de la conjecture de Poincaré a été donnée par Smale en dimension ≥ 5 dans les années 1960, par Freedmann en dimension 4 dans les années 1980, et par Perelman en dimension 3, tout récemment, dans les années 2000. Pour plus de renseignements sur la conjecture de Poincaré et les péripéties de sa résolution, on pourra consulter [68], ouvrage de vulgarisation où l'on pourra également trouver des références pour aller plus loin.

Remarquons que, si N est un domaine fondamental pour la contraction de D, on a $D = \cup_n f^n(N)$. Nous aurons besoin de deux modèles, et non plus d'un seul, car une contraction peut préserver ou bien renverser l'orientation, et une conjugaison topologique préserve cette propriété :

Proposition 3.2. *Soit $x \mapsto f(x) = Bx + o(||x||)$ une contraction hyperbolique sur un voisinage U du point fixe $0 \in \mathbb{R}^n$ (la matrice B est inversible, de spectre contenu dans l'intérieur du disque unité de $\mathbb{C}$). Soit R la matrice diagonale ayant $n-1$ valeurs propres égales à $\frac{1}{2}$, et une valeur propre égale à $-\frac{1}{2}$. Alors, il existe un voisinage W de 0 dans U, et un homéomorphisme H de W sur un voisinage de 0 dans U tel que $H(0) = 0$, qui conjugue f avec $x \mapsto \frac{1}{2}x$, lorsque B préserve l'orientation ($\mathrm{Det}(B) > 0$), et avec $x \mapsto Rx$ lorsque B renverse l'orientation ($\mathrm{Det}(B) < 0$). En conséquence, on a deux classes d'équivalence de contractions hyperboliques locales, et toute contraction hyperbolique est localement conjuguée à sa partie linéaire.*

Rappelons que deux applications G et F sont conjuguées sur W par un homéomorphisme H de W sur son image si $H \circ G(x) = F \circ H(x)$, x et $G(x)$ sont dans W.

Démonstration. La preuve est très similaire à celle faite pour les champs. On va juste l'esquisser.

Désignons par M la matrice $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ ou R selon que B préserve ou renverse l'orientation. En appliquant le théorème II-7.5, on sait qu'il existe un choix de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur $\mathbb{R}^n$ avec les propriétés suivantes. Si $||x||$ est la norme associée au produit scalaire euclidien $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante positive $\mu < 1$ et un disque (ou boule) $W = D_{\rho_0} = \{||x|| \leq \rho_0\} \subset U$, de rayon $\rho_0 > 0$ assez petit pour que

$$||f(x)|| \leq \mu ||x|| \tag{3.5}$$

pour tout $x \in D_{\rho_0}$. En fait, dans ces coordonnées, l'isomorphisme linéaire B envoie chaque sphère $S_\rho = \{||x|| = \rho\}$ sur une sphère transverse aux directions radiales (on a choisi les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ par conjugaison linéaire, de façon à ce que B soit écrite sous la forme $B = S + N$, comme dans le lemme II-7.4, avec $||N|| < \delta$ et un δ assez petit). Comme $f(x) = Bx + o(||x||)$, on a aussi que l'image $f(S_{\rho_0})$ est transverse aux directions radiales, dès que ρ_0 est assez petit. Cette dernière propriété implique facilement que la région A_f entre S_{ρ_0} et $f(S_{\rho_0})$, qui est un domaine fondamental pour f, est difféomorphe à l'anneau $A_M = \{\frac{1}{2}\rho_0 \leq ||x|| \leq \rho_0\}$ entre les sphères S_{ρ_0} et $M(S_{\rho_0})$ (anneau qui est un domaine fondamental pour la contraction linéaire $x \mapsto Mx$).

On choisit alors un homéomorphisme h de A_M sur A_f, tel que $h(m) = m$ pour tout $m \in S_{\rho_0}$ et $h(m) = f \circ M^{-1}(m)$ pour tout $m \in M(S_{\rho_0})$ (la construction d'un tel h est un point un peu délicat que nous ne développerons pas ici : voir, par exemple, [34] théorème 4.24, p. 93-94). Comme tout $x \in D_{\rho_0} - \{0\}$ est de la forme $x = M^p m$ (puissance d'itération) pour un $m \in A_M$ (car A_M est un domaine

fondamental de M), on peut étendre h en une application H, de $D_{\rho_0} - \{0\}$ dans lui-même, qui conjugue M avec f. Pour ce faire, si $x = M^p m$, on pose :

$$H(x) = H(M^p m) = f^p \circ h(m),$$

pour tout $m \in A_M$, et tout $p \in \mathbb{N}$. Remarquez que $H_{|A_M} \equiv h$, et que le choix de h sur $f(S_{\rho_0})$ assure que H est bien défini, et est continu dans un voisinage de A_M. Clairement H est un homéomorphisme, de $D_{\rho_0} - \{0\}$ dans lui-même, car il est bijectif et continu. D'autre part, cet homéomorphisme conjugue M avec f. En effet, si $x = M^p m$, on a :

$$H \circ M(x) = H(M^{p+1} m) = f^{p+1} \circ h(m) = f(f^p \circ h(m)) = f \circ H(x).$$

Comme dans la preuve de la proposition précédente, on montre pour finir que H se prolonge par continuité par $H(0) = 0$, en un homéomorphisme de $W = D_{\rho_0}$ dans lui-même. ■

3.2.2. Cas général d'un point de selle linéaire

Nous allons maintenant nous limiter au cas linéaire. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le cas général va être déduit du résultat établi ci-dessus pour le cas contractant (utilisé ici dans le cas linéaire). Nous commençons par les champs de vecteurs.

Proposition 3.3. *Soit X^A un champ linéaire hyperbolique quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $E^s \oplus E^u$ sa décomposition en espaces propres stable/instable. Alors le flot de X^A est topologiquement conjugué au flot du champ linéaire*

$$\begin{array}{c} E^s \\ \\ \\ \\ E^u \end{array} \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où le nombre de valeurs propres égales à -1 est égal à la dimension de E^s, et le nombre de valeurs propres égales à 1 est égal à la dimension de E^u.

Démonstration. Nous reprenons les notations du début du paragraphe 3.2. Le champ linéaire est associé à une matrice A ayant pour restrictions A_s (resp. A_u) sur l'espace stable (resp. instable). On introduit aussi les autres notations

$x_s, x_u, X_s, X_u, \ldots$ Soit d_s et d_u les dimensions de E^s et E^u respectivement. Désignons par Id^{d_s} et Id^{d_u} les matrices identités des espaces E^s et E^u. La matrice définie dans l'énoncé est égale à

$$M = \begin{pmatrix} -\mathrm{Id}^{d_s} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}^{d_u} \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 3.1, nous obtenons un homéomorphisme H_s de E^s, qui conjugue le flot $\varphi_A^s(t, x_s)$ du champ contractant X_s avec le flot $e^{-t}x_s$ du champ associé à la matrice $-\mathrm{Id}^{d_s}$. De même, on obtient un homéomorphisme H_u de E^u, qui conjugue le flot du champ contractant $-X_u$ avec le flot du champ associé à la matrice $-\mathrm{Id}^{d_u}$. Ce même homéomorphisme H_u conjugue le flot $\varphi_A^u(t, x_u)$ de X_u et le flot $e^t x_u$ du champ associé à la matrice Id^{d_u}. Comme le flot de X_A est égal sur $E^s \oplus E^u$ à $(\varphi_A^s(t, x_s), \varphi_A^u(t, x_u))$, l'homéomorphisme $H_s \times H_u$, de $E^s \oplus E^u$ sur lui-même, conjugue ce flot avec le flot $(e^{-t}x_s, e^t x_u)$ du champ linéaire X_M, associé à la matrice M. ∎

Remarque 3.5. Le type topologique d'un champ linéaire, de type selle hyperbolique, ne dépend donc que *d'un seul nombre*, à savoir $\dim(E^s)$ avec $0 \leq \dim(E^s) \leq n$.

L'étude de la classification des difféomorphismes linéaires hyperboliques est complètement équivalente à celle des champs de vecteurs hyperboliques, mais elle est plus délicate. En effet un difféomorphisme linéaire B peut préserver ou bien, indépendamment, renverser l'orientation de son espace stable et de son espace instable.

La proposition 3.2 nous a donné deux modèles possibles pour une contraction linéaire de $\mathbb{R}^n$: la contraction définie par la matrice $\frac{1}{2}\mathrm{Id}_n$ si l'orientation est préservée, ou bien la contraction définie par la matrice R_n (matrice $n \times n$ diagonale, avec le premier coefficient égal à $-\frac{1}{2}$, et les autres égaux à $\frac{1}{2}$), si l'orientation est renversée. Comme modèle des dilatations linéaires nous pouvons donc prendre les applications définies par les matrices $2\mathrm{Id}_n$, ou bien R_n^{-1} (matrice $n \times n$ diagonale, avec le premier coefficient égal à -2, et les autres égaux à 2). En utilisant ces différents modèles, on obtient finalement le résultat suivant, par une démonstration tout à fait similaire à celle de la proposition précédente :

Proposition 3.4. *Soit $x \mapsto Bx$ un automorphisme linéaire hyperbolique de $\mathbb{R}^n$. Supposons que les dimensions des espaces stable et instable soient égales respectivement à d_s et d_u. Soient y et z des coordonnées linéaires de E^s, E^u respectivement. Alors $x \mapsto Bx$ est topologiquement conjugué à l'un des quatre automorphismes*

linéaires suivants :

$$(y,z) \mapsto \left(\frac{1}{2}y, 2z\right), \quad (y,z) \mapsto (R_{d_s}y, R_{d_u}^{-1}z), \tag{3.6}$$

$$(y,z) \mapsto \left(\frac{1}{2}y, R_{d_u}^{-1}z\right), \quad (y,z) \mapsto (R_{d_s}y, 2z). \tag{3.7}$$

Dans l'automorphisme : $(y,z) \mapsto (R_{d_s}y, R_{d_u}^{-1}z)$, le signe des valeurs propres associées aux premières composantes du champ selon y et z est négatif et, au total, le déterminant est positif et l'orientation est conservée. Les automorphismes (3.6) sont les modèles pour les automorphimes $x \mapsto Bx$ qui préservent l'orientation, alors que les automorphismes (3.7) renversent l'orientation

Remarque 3.6. Nous avons réduit la classification des points de selles hyperboliques linéaires à des produits directs de dynamiques contractantes ou dilatantes linéaires, dynamiques qui ont elles-mêmes été classifiées facilement dans les paragraphes précédents. Cette décomposition en produit direct est équivalente à l'invariance des feuilletages formés par les plans affines parallèles aux espaces propres de la dynamique. L'existence de ces feuilletages résulte de la définition même des espaces propres invariants. Nous démontrerons dans la prochaine section l'existence de feuilletages invariants locaux au voisinage des points de selles hyperboliques non linéaires (de champs ou de difféomorphismes). Ce fait est hautement non trivial et, d'ailleurs, ces feuilletages ne sont pas différentiables au sens usuel. Leur régularité sera cependant suffisante pour pouvoir reproduire la démonstration faite dans le cas linéaire.

Dans le cas $n = 2$, illustrons la proposition précédente par des figures familières montrant le comportement local des solutions au voisinage d'un point fixe hyperbolique. On se limite au cas où B préserve l'orientation (les deux valeurs propres ont le même signe).

a) Puits (figure 3.6) : les deux valeurs propres de B ont un module plus petit que 1 : $E^s = \mathbb{R}^2$; $E^u = \{0\}$.

b) Source (figure 3.7) : les deux valeurs propres de B ont un module plus grand que 1 : $E^u = \mathbb{R}^2$; $E^s = \{0\}$.

c) Selle (figure 3.8) : une valeur propre est de module supérieur à 1, l'autre est de module inférieur à 1. On a deux cas possibles avec pour modèles $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{1}{2}x_1, 2x_2)$ et $(x_1, x_2) \mapsto (-\frac{1}{2}x_1, -2x_2)$. Dans le second cas, l'application renverse l'orientation sur chacun des axes de coordonnées, mais B préserve l'orientation sur $\mathbb{R}^2$ puisque nous avons : $\mathrm{Det}(B) = (-\frac{1}{2})(-2) > 0$.

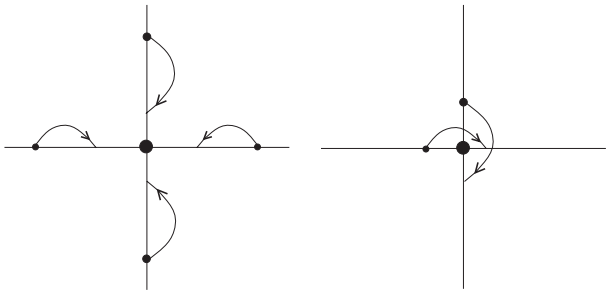


Figure 3.6. À gauche, les deux valeurs propres sont positives. À droite, les deux sont négatives.

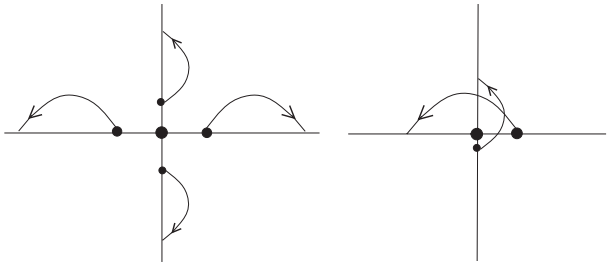


Figure 3.7. À gauche, les deux valeurs propres sont positives. À droite, les deux sont négatives.

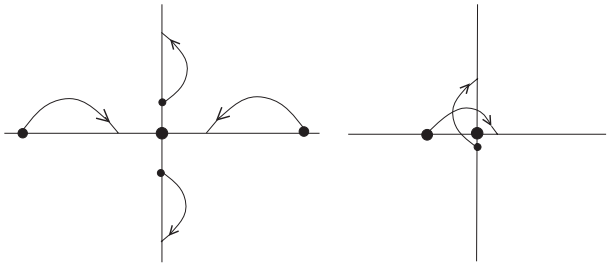


Figure 3.8

3.3. Variétés invariantes locales

Dans le paragraphe précédent, nous avons précisé le comportement des champs de vecteurs et des difféomorphismes linéaires. En particulier, nous avons remarqué que la dynamique laisse invariants les espaces stable et instable E^s et E^u. Nous allons maintenant considérer le comportement dynamique au voisinage d'un point

singulier hyperbolique de champ de vecteurs, ou d'un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme, sur une variété M. On peut définir en un tel point p_0 des sous-espaces vectoriels de $T_{p_0}M \approx \mathbb{R}^n$ invariants pour la partie linéaire : l'espace propre stable et l'espace propre instable. Il n'y a aucune raison pour que ces espaces soient aussi invariants pour le champ ou le difféomorphisme non linéaires, même si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par contre, nous allons voir qu'il existe deux disques *invariants*, plongés de façon non linéaire dans M, qui sont tangents en p_0 aux espaces E^s et E^u. Ces disques plongés sont les *sous-variétés invariantes locales stable et instable.*

3.3.1. Variétés invariantes locales pour les difféomorphismes

Contrairement à l'ordre suivi dans les paragraphes précédents, nous allons commencer par le cas d'un point fixe hyperbolique p_0 de difféomorphisme f, car le résultat pour un point singulier de champ de vecteurs s'en déduira très facilement. Soit donc un difféomorphisme f sur une variété M.

Définition 3.6. Soit f un difféomorphisme d'une variété M et p_0 un point fixe de f. On considère un voisinage U de p_0. On définit deux ensembles invariants locaux :

(1) L'ensemble invariant stable local dans U :

$$W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0) = \{x \in U \mid \forall p \in \mathbb{N}, f^p(x) \in U \text{ et } (f^p(x))_p \to p_0, \text{ pour } p \to +\infty\}.$$

(2) L'ensemble invariant instable local dans U :

$$W^{U,u}_{\text{loc}}(f,p_0) = \{x \in U \mid \forall p \in \mathbb{N}, f^{-p}(x) \in U \text{ et } f^{-p}(x) \to p_0, \text{ pour } p \to +\infty\}.$$

On suppose maintenant que p_0 est un point fixe hyperbolique. On choisit un voisinage U, muni de coordonnées locales, pour lesquelles $p_0 = 0$ et $T_{p_0}M \approx \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ est la décomposition en espaces propres invariants stable et instable. Considérons le développement à l'ordre 1 de f en 0 :

$$f(x) = Bx + o(\|x\|).$$

Les ensembles invariants de l'isomorphisme linéaire B sont les sous-espaces vectoriels E^s et E^u. D'après le résultat suivant, pour f, les ensembles invariants locaux sont des disques plongés : c'est une version non linéaire et locale du cas linéaire.

Théorème 3.1 **(Existence de variétés invariantes locales pour les difféomorphismes).** *On peut choisir le voisinage U pour que les ensembles invariants locaux $W^{U,s}_{\rm loc}(f,p_0)$ et $W^{U,u}_{\rm loc}(f,p_0)$ soient des disques plongés difféomorphes aux disques unités de E^s et E^u respectivement. Le disque $W^{U,s}_{\rm loc}(f,p_0)$ est tangent en p_0 à E^s et le disque $W^{U,u}_{\rm loc}(f,p_0)$ est tangent en p_0 à E^u (figure 3.9). De plus :*

1. $W^{U,s}_{\rm loc}(f,p_0)=\{x\in U \mid \forall p\in\mathbb{N}, f^p(x)\in U\}$,
2. $f(W^{U,s}_{\rm loc}(f,p_0))\subset \mathrm{Int}(W^{U,s}_{\rm loc}(f,p_0))$,
3. $W^{U,u}_{\rm loc}(f,p_0)=\{x\in U \mid \forall p\in\mathbb{N}, f^{-p}(x)\in U\}$,
4. $f^{-1}(W^{U,u}_{\rm loc}(f,p_0))\subset \mathrm{Int}(W^{U,u}_{\rm loc}(f,p_0))$.

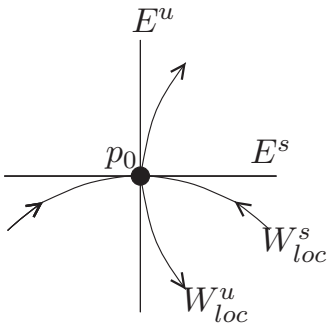


Figure 3.9

Remarque 3.7. Le théorème 3.1 implique que les ensembles invariants locaux sont des sous-variétés (à bord), c'est pourquoi nous les appellerons dorénavant : *variétés invariantes locales stable et instable*. Pour simplifier les notations, on ne mentionnera pas systématiquement l'ouvert U, et on écrira en général : $W^s_{\rm loc}(f,p_0)$ et $W^u_{\rm loc}(f,p_0)$. Ces notations désigneront les variétés invariantes locales associées à un voisinage U non précisé.

Nous n'allons pas donner les détails de la preuve de ce théorème, preuve qui est longue et technique. Nous renvoyons à [62] ou [52] pour ces développements. Nous allons seulement esquisser le cas lipschitzien qui est relativement facile (voir p. 41-49 de [62]. Le cas différentiable, beaucoup plus technique, est traité aux pages 49-62 de cette référence).

Une esquisse de preuve. On va seulement esquisser la preuve de l'existence de la variété stable (pour obtenir la variété instable il suffit de remplacer f par f^{-1}).

On suppose, en restreignant X à un domaine de carte contenant p_0, que X est défini sur $\mathbb{R}^n$ et que $p_0 = 0$. Soit des disques D^s et D^u centrés à l'origine de E^s et E^u respectivement, dont les rayons ρ_s, ρ_u seront choisis assez petits. On considère $U = D^s \oplus D^u$. On désigne les coordonnées de E^s et E^u par x^s et x^u respectivement. On va seulement esquisser la preuve que, si ρ_s est assez petit, W^s_{loc} coïncide, dans U, avec le graphe d'une fonction lipschitzienne $g^s(x^s) : D^s \mapsto E^u$, avec $g_s(0) = 0$. La clé de la démonstration est l'observation que si ρ_s est assez petit, et si φ est une fonction lipschitzienne vérifiant $\varphi(0) = 0$, alors $U \cap f^{-1}(\text{Graphe}[\varphi])$ est aussi le graphe d'une fonction lipschitzienne de D^s dans E^u, s'annulant en 0. Heuristiquement, cela suit du fait que, au voisinage des points de E^s, l'application f^{-1} étire les distances dans la direction de E^s et les contracte dans la direction de E^u (figure 3.10).

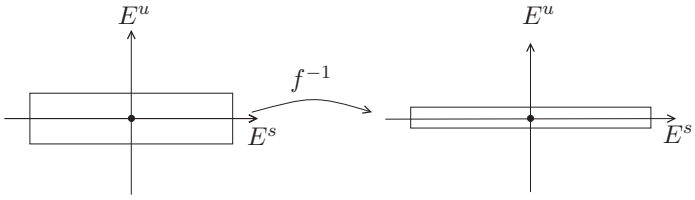


Figure 3.10. Action de f^{-1} sur les espaces propres E^s et E^u.

On introduit alors l'espace $L(D^s, E^u)$ des applications lipschitziennes $\varphi : D^s \mapsto E^u$, $\varphi(0) = 0$. Cet espace est un espace de Banach, muni de la norme

$$||\varphi||_L = \text{Sup}\left\{ \frac{||\varphi(a) - \varphi(b)||}{||a - b||} \;\middle|\; a \neq b \in D^s \right\}.$$

Soit $L_K(D^s, E^u) = \{\varphi \in L(D^s, E^u) \mid ||\varphi||_L \leq K\}$ la boule fermée de rayon K dans $L(D^s, E^u)$. On définit l'application *transformation de graphe* de $L_K(D^s, E^u)$ dans lui-même par la condition

$$\text{Graphe}[\mathcal{T}_f(\varphi)] = U \cap f^{-1}(\text{Graphe}[\varphi]).$$

Dans la figure 3.11, on représente la transformation de graphe $\mathcal{T}_f$ pour une fonction φ générale ne vérifiant pas $\varphi(0) = 0$.

En utilisant à nouveau la remarque selon laquelle l'application f^{-1} étire les distances dans la direction de E^s, et les contracte dans la direction de E^u, on montre que si ρ_s est assez petit, alors l'application $\mathcal{T}_f$ est une contraction lipschitzienne dans une boule $E = \{||\varphi||_L \leq \alpha\}$ pour $\alpha > 0$ assez petit. Cela signifie qu'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que pour toute paire $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, on ait :

$$||\mathcal{T}_f(\varphi_1) - \mathcal{T}_f(\varphi_2)||_L \leq K||\varphi_1 - \varphi_2||_L.$$

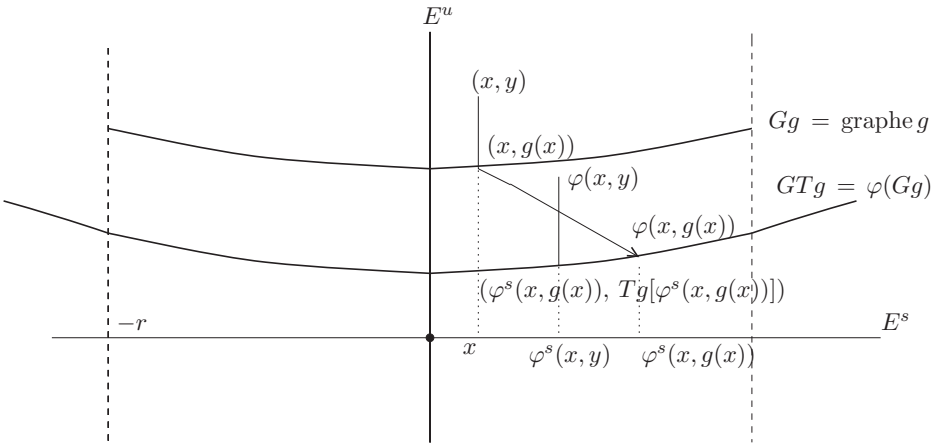


Figure 3.11. Transformation de graphe.

Par le principe du point fixe pour les contractions lipschitziennes (théorème II-3.1), il existe un unique point fixe de $\mathcal{T}_f$ dans E. Par construction, si g_s est ce point fixe, le graphe de g_s est invariant par f et est contenu dans W^s_{loc}. Pour voir que ce graphe coincide avec W^s_{loc} dans U, on montre que si $x \notin \text{Graphe}[g_s]$ alors $f^p(x) \not\to 0$ (en fait, il existe un $\bar{p}$ tel que $f^{\bar{p}}(x) \notin U$). ■

Remarque 3.8.

1. Le théorème est trivial si f est une contraction hyperbolique en p_0 : si W est un voisinage assez petit (la boule W de rayon ρ_0 introduite dans la preuve de la proposition 3.2), la variété locale stable est le voisinage tout entier, alors que la variété instable est réduite à $\{p_0\}$. On a évidemment la situation inverse pour un point fixe de dilatation hyperbolique.

2. La restriction du difféomorphisme f à sa variété stable locale $W^s_{\text{loc}}(f,p_0)$ est une contraction hyperbolique. On a une remarque analogue pour la restriction de f^{-1} à sa variété instable locale.

3. Il suit de la preuve du théorème 3.1 que W^s_{loc} peut être caractérisée comme l'ensemble des points $x \in U$ tels que $f^p(x) \in U$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. De même, W^u_{loc} est l'ensemble des points $x \in U$ tels que $f^{-p}(x) \in U$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cette propriété est mentionnée dans l'énoncé.

Ce qui vient d'être dit pour les points fixes de difféomorphismes peut être étendu aux points périodiques. Soit p_0 un point l-périodique et

$$O_f(p_0) = \{p_0, f(p_0), \ldots, f^{l-1}(p_0)\}$$

son orbite. Si U est un voisinage de cette orbite, on définit les ensembles invariants stable et instable de p_0 (ou $O_f(p_0)$) de la même façon que pour un point fixe, en remplaçant la distance au point fixe par la distance à l'orbite périodique. Rappelons que le point p_0, l-périodique, est dit hyperbolique si p_0 est un point fixe hyperbolique de f^l. On a alors :

Théorème 3.2. *Il existe un voisinage U de p_0 tel que la variété invariante stable locale de $O_f(p_0)$, dans le voisinage $\mathcal{U} = U \cup \ldots \cup f^{l-1}(U)$, soit égale à $W^s_{\text{loc}}(f, O_f(p_0)) = w^s_{\text{loc}}(f^l, p_0) \cup \ldots \cup f^{l-1}(w^s_{\text{loc}}(f^l, p_0))$, où $w^s_{\text{loc}}(f^l, p_0)$ est la variété locale stable de f^l au point p_0 dans U. On a un résultat analogue pour la variété locale instable $W^s_{\text{loc}}(f, O_f(p_0))$.*

3.3.2. Variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs

Considérons maintenant un point singulier hyperbolique p_0 pour un champ de vecteurs X de M. Comme pour les difféomorphismes, on définit les ensembles invariants locaux :

Définition 3.7. Soit U un voisinage X d'un point singulier p_0 du champ X. Soit $\varphi(t, x)$ le flot de X. On définit deux ensembles invariants locaux :

L'ensemble invariant stable local dans U :

$$W^{U,s}_{\text{loc}}(X, p_0) = \{x \in U \mid \varphi(t, x) \in U, \forall t \geq 0 \text{ et } \varphi(t, x) \to p_0 \text{ pour } t \to +\infty\}.$$

L'ensemble invariant instable local dans U :

$$W^{U,u}_{\text{loc}}(X, p_0) = \{x \in U \mid \varphi(-t, x) \in U, \forall t \geq 0 \text{ et } \varphi(-t, x) \to p_0 \text{ pour } t \to \infty\}.$$

On suppose maintenant que p_0 est un point singulier hyperbolique. On choisit un voisinage U de p_0, avec des coordonnées locales pour lesquelles $p_0 = 0$, et $T_{p_0}M \approx \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ est la décomposition en espaces propres invariants stable et instable. Considérons le développement à l'ordre 1 de X en 0 :

$$X(x) = Ax + o(\|x\|).$$

Nous avons maintenant la caractérisation suivante des ensembles invariants locaux pour un point singulier hyperbolique :

Théorème 3.3 **(Existence de variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs).** *Soit X un champ de vecteurs ayant en $p_0 \in M$ un point singulier hyperbolique. On*

peut choisir le voisinage U pour que les ensembles invariants locaux $W^{U,s}_{\rm loc}(X,p_0)$ et $W^{U,u}_{\rm loc}(X,p_0)$ coïncident avec les ensembles invariants du difféomorphisme $\varphi_1 : x \mapsto \varphi(1,x)$ (qui est de classe $\mathcal{C}^k$ et admet p_0 comme point fixe hyperbolique). En conséquence, ces ensembles sont des disques plongés difféomorphes aux disques unités de E^s et E^u respectivement. Le disque $W^{U,s}_{\rm loc}(X,p_0)$ est tangent en p_0 à E^s, et le disque $W^{U,u}_{\rm loc}(X,p_0)$ est tangent en p_0 à E^u. De plus, on a des propriétés analogues aux propriétés (1)-(4) du théorème 3.1, en remplaçant $p \in \mathbb{N}$ par $t \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Pour tout t, notons par φ_t le difféomorphisme $x \mapsto \varphi(t,x)$. Soit $W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)$ la variété locale stable du difféomorphisme φ_1. Pour tout t, on a $\varphi_t \circ \varphi_1 \equiv \varphi_1 \circ \varphi_t$. Il s'ensuit que $U \cap \varphi_t(W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0))$, pour $t \leq 0$, est aussi une variété invariante de φ_1. Comme son espace tangent en p_0 est égal à E^s, en raison de l'unicité de la variété stable locale dans U, on a $U \cap \varphi_t(W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)) = W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)$, pour $t \leq 0$. Cela est équivalent à dire que $\varphi_t(W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)) \subset W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)$ pour tout $t \geq 0$ (ou encore que le champ de vecteurs X est tangent à $W^{U,s}_{\rm loc}(\varphi_1,p_0)$). Il s'ensuit également que $\varphi(p,x) \to p_0$ pour $p \to +\infty$ ($p \in \mathbb{N}$). On peut écrire tout $t \in \mathbb{R}^+$ sous la forme $t = p + \tau$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $\tau \in [0,1]$. En utilisant la compacité de l'intervalle $[0,1]$, (comme on l'a fait dans la preuve du lemme II-7.2 par exemple), on en déduit que $\varphi(t,x) \to p_0$ pour $t \to +\infty$. On a évidemment une démonstration analogue pour la variété instable locale. ∎

Pour finir, considérons une orbite périodique γ d'un champ de vecteurs X sur une variété M de dimension $n+1$. Si $\mathcal{U}$ est un voisinage de l'orbite γ, on définit des ensembles invariants locaux, stable et instable, de manière complètement analogue à ce qui a été fait pour les points singuliers dans la définition 3.7 : il suffit de remplacer la distance au point singulier par la distance à l'orbite. On désignera ces ensembles invariants par $W^{\mathcal{U},s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ et $W^{\mathcal{U},u}_{\rm loc}(X,\gamma)$ respectivement.

On choisit une section transverse Σ difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Posons $p_0 = \Sigma \cap \gamma$. L'application de Poincaré h est définie sur un voisinage W de p_0 dans Σ. C'est un difféomorphisme local, de W dans Σ, ayant p_0 comme point fixe. Rappelons que γ est dite (orbite) hyperbolique si p_0 est un point fixe hyperbolique de h. Supposons que cela soit le cas. On peut alors appliquer à h le théorème 3.2 : il existe un voisinage U de p_0 dans W, pour lequel les ensembles invariants stable et instable $w^{U,s}_{loc}(h,p_0), w^{U,u}_{loc}(h,p_0)$ de h sont des disques plongés dans W. Ces variétés invariantes locales de l'application de Poincaré déterminent des variétés invariantes locales pour l'orbite γ elle-même :

Théorème 3.4. *Soit U un voisinage de p_0 dans W donné par le théorème 3.1 appliqué à l'application de Poincaré h.*

1. *Soit $w^{U,s}_{loc}(h,p_0)$ la variété invariante stable locale de h dans U. Soit $\mathcal{U}^s$ le voisinage de γ formé par la réunion des segments d'orbite entre les points de U et leur premier retour sur Σ. Alors, l'ensemble invariant stable $W^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ de γ dans $\mathcal{U}^s$ est formé par la réunion des segments d'orbite, entre les points de $w^{U,s}_{loc}(h,p_0)$ et leur premier retour sur Σ par h.*

2. *Soit $w^{U,u}_{loc}(h,p_0)$ la variété invariante instable locale de h dans U. Soit $\mathcal{U}^u$ le voisinage de γ formé par la réunion des segments d'orbite entre les points de U et leur premier retour sur Σ par le difféomorphisme inverse h^{-1} (que l'on suppose défini sur W). Alors, l'ensemble invariant instable $W^{\mathcal{U}^u,u}_{\rm loc}(X,\gamma)$ de γ dans $\mathcal{U}^u$ est formé par la réunion des segments d'orbite, entre les points de $w^{U,s}_{loc}(h,p_0)$ et leur premier retour sur Σ par h^{-1}.*

Il est possible de trouver un voisinage tubulaire compact $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}^s\cap\mathcal{U}^u$ de γ, difféomorphe à un fibré sur S^1, de fibre le disque unité de $\mathbb{R}^n$, dont le bord est une sous-variété tranverse à X le long de $W^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ et de $W^{\mathcal{U}^u,u}_{\rm loc}(X,\gamma)$ (ce bord est donc transverse à $W^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ et à $W^{\mathcal{U}^u,u}_{\rm loc}(X,\gamma)$). Il s'ensuit que les ensembles invariants de γ dans $\mathcal{U}$ sont les intersections de $\mathcal{U}$ avec $W^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ et $W^{\mathcal{U}^u,u}_{\rm loc}(X,\gamma)$.

Démonstration. Considérons le cas de l'ensemble invariant stable. Notons $\widetilde{W}^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$ l'ensemble formé par la réunion des segments d'orbite, entre les points de $w^{U,s}_{loc}(h,p_0)$ et leur premier retour sur Σ. Par construction, il est clair que $W^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)\subset\widetilde{W}^{\mathcal{U}^s,s}_{\rm loc}(X,\gamma)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, on suppose que W est à fermeture compacte dans Σ. Il existe alors un temps fini τ (avec $\tau\geq T$, la période de γ) tel que le temps de retour sur Σ, à partir des points de W, soit inférieur à τ. Si $\varphi(t,x)$ est le flot de X, on peut alors écrire $\mathcal{U}^s=\cap\{\varphi(t,x)\mid(t,x)\in[0,\tau]\times U\}$. Maintenant, si $x\in w^{U,s}_{loc}(h,p_0)$, il existe une suite croissante $(t_i)\to+\infty$ avec $t_{i+1}-t_i\leq\tau$ telle que $\varphi(t_i,x)\to p_0$. On en déduit que $\varphi(t,x)\to\gamma$, en utilisant la compacité de l'intervalle $[0,\tau]$ (voir par exemple la preuve du lemme II-7.2 sur la stabilité).

Le cas de l'ensemble invariant instable se ramène au cas de l'ensemble invariant stable en remplaçant X par $-X$.

Finalement, il est très facile de construire un voisinage tel que $\mathcal{U}$. Nous laissons au lecteur les détails de cette construction. ■

Remarque 3.9. $\mathcal{U}$ est un voisinage compact de γ. S'il est orientable, il est difféomorphe à $S^1\times D^n$, où D^n est le disque unité de $\mathbb{R}^n$. S'il est non-orientable, il

est difféomorphe au fibré non orientable (différentiable) sur S^1, de fibre D^n, dit $(n+1)$-tore solide de Möbius (le ruban de Möbius si $n = 1$) ; on a donné la définition précise d'un fibré différentiable dans le chapitre 2. Cette seconde possibilité ne peut arriver que si la variété M est non-orientable (voir l'item 2 de la remarque I-2.1 pour la définition d'une variété M non orientable).

La variété stable locale $W^{\mathcal{U},s}_{\text{loc}}(X,\gamma)$ est aussi un fibré sur S^1, de fibre D^{d_s}, si d^s est la dimension de l'espace propre stable de h en p_0. Ce fibré peut être orientable ou non. On peut faire la même remarque pour la variété locale instable $W^{\mathcal{U},u}_{\text{loc}}(X,\gamma)$. On obtient finalement quatre possibilités topologiques pour la situation locale de type selle, correspondant aux quatre possibilités énumérées dans la proposition 3.4, pour la classification des automorphismes linéaires hyperboliques de type selle (deux dans le cas d'une orbite à voisinage tubulaire trivial et deux dans le cas d'une orbite à voisinage tubulaire de type Möbius). Par exemple, pour une orbite hyperbolique de type selle d'un champ de vecteurs, sur une variété orientable de dimension trois, les variétés invariantes locales sont simultanément, soit deux rubans simples, soit deux rubans de Möbius (figure 3.12).

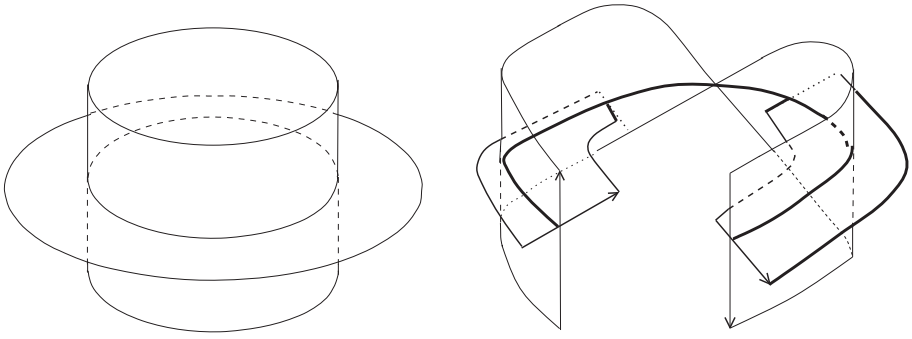


Figure 3.12. Figure de gauche : 2 rubans simples. Figure de droite : 2 rubans de Möbius.

3.4. Le λ-Lemma de Palis

Soit f un difféomorphisme d'une variété M ayant en p_0 un point fixe hyperbolique de type selle. Nous avons vu dans la démonstration du théorème 3.1, que l'on peut obtenir la variété instable locale $W^u_{\text{loc}}(f,p_0)$ en itérant le graphe d'une courbe par p_0, transversale à la variété stable locale $W^s_{\text{loc}}(f,p_0)$ (la raison en est que la variété instable locale est obtenue comme point fixe d'une contraction lipschitzienne). Comme nous allons le formuler précisément dans le théorème 3.5

ci-après, l'idée de Palis dans le λ-Lemma est que l'on pouvait obtenir, plus généralement, la variété instable locale, en itérant n'importe quelle section N *transverse* à $W^s_{\text{loc}}(f, p_0)$, même par un point différent de p_0. Cette idée pourrait être exploitée pour donner une nouvelle démonstration de l'existence de la variété instable locale. Nous n'allons pas développer cette idée, mais plutôt utiliser l'existence des variétés invariantes locales pour donner une preuve facile du λ-Lemma.

Soit d_s, d_u les dimensions des espaces propres stable et instable de p_0. On suppose que le point est de type selle, ce qui signifie que $d_s \geq 1, d_u \geq 1$. L'existence de variétés invariantes va nous permettre de simplifier l'écriture locale du difféomorphisme, en choisissant des coordonnées $x = (x^s, x^u) \in R^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$ sur un voisinage U de p_0, dans lesquelles $W^u_{\text{loc}}(p_0) = U \cap \{x^s = 0\}$ et $W^s_{\text{loc}}(p_0) = U \cap \{x^u = 0\}$ (et donc $p_0 = (0, 0)$). On supposera que U est compact.

Dans la suite, on considérera des voisinages du point $(0, 0)$: $W^s \times W^u \subset \text{Int}(U)$, où W^s, W^u sont des voisinages difféomorphes à des disques à l'origine de $\mathbb{R}^{d_s}$ et $\mathbb{R}^{d_u}$. Ces voisinages sont choisis tels que :

$$f(W^s \times \{0\}) \subset \text{Int}(W^s) \times \{0\} \quad \text{et} \quad f^{-1}\big(\{0\} \times W^u\big) \subset \{0\} \times \text{Int}(W^u). \tag{3.8}$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.2, on peut choisir des normes sur $\mathbb{R}^{d_s}$ et $\mathbb{R}^{d_u}$ pour lesquelles les disques de rayons assez petits vérifient cette propriété. On supposera aussi que :

$$f\big(W^s \times W^u\big) \subset \text{Int}(U) \quad \text{et} \quad f^{-1}\big(W^s \times W^u\big) \subset \text{Int}(U). \tag{3.9}$$

Si $D \subset \mathbb{R}^{d_u}$ est un disque centré à l'origine, on désignera par $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^{d_s})$ l'espace des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_s}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit sur cet espace la norme

$$||g||^k_D = \text{Sup}_{x^u \in D}\{||g(x^u)||, ||dg(x^u)||, \ldots, ||d^k g(x^u)||\}. \tag{3.10}$$

Rappelons que $d^l g(x^u)$ désigne la différentielle d'ordre l de g au point x^u; cette différentielle est une application l-linéaire sur $\mathbb{R}^{d_u}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_s}$ et sa norme est définie par

$$||d^l g(x^u)|| = \text{Sup}\big\{||d^l g(x^u)[v_1, \ldots, v_l]|| \;\big|\; ||v_1|| = \ldots = ||v_l|| = 1\big\},$$

(voir [19], p. 107-108. ou [11] p. 26). Pour $d_s = 1$, la norme $||\cdot||^k_D$ est la norme introduite dans le chapitre 2 sur l'espace $\mathcal{C}^k_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{R})$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à dérivées partielles bornées sur un ouvert euclidien U. Ici, comme on travaille sur un disque fermé D (et non un ouvert), les fonctions $||d^l g(x^u)||$ sont bornées en raison de la compacité de D. Comme dans le chapitre 2, $||\cdot||^k_D$ est appelée norme de la *convergence uniforme en classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* D et, de manière complétement similaire

à celle du chapitre 2, on montre que l'espace $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^{d_s})$, muni de la norme $||\cdot||_D^k$, est un espace de Banach. De même, l'espace $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^{d_s})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, muni de toutes les normes $||\cdot||_D^k$, $k \in \mathbb{N}$, est un espace de Fréchet. Dorénavant, on supposera toujours les espaces $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^{d_s})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, munis des topologies de convergence uniforme que nous venons de définir.

3.4.1. Quelques estimations préalables

Soient f^s, f^u les composantes de f dans le produit $\mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$:

$$f(x^s, x^u) = (f^s(x^s, x^u), f^u(x^s, x^u)),$$

pour $(x^s, x^u) \in \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$. Le fait que les ensembles $(\mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}) \cap U$ et $(\{0\} \times \mathbb{R}^{d_u}) \cap U$ sont invariants par f, se traduit par : $f^s(0, x^u) = 0$ pour $(0, x^u) \in (\{0\} \times \mathbb{R}^{d_u}) \cap U$, et $f^u(x^s, 0) = 0$ pour $(x^s, 0) \in (\mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}) \cap U$. Soit :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & B^u \end{pmatrix},$$

la partie linéaire de f en 0. Par hypothèse, $||B^s|| < 1$ et $||B^u|| > 1$. Pour les composantes de $Df(x)$ en un $x \in U$ quelconque, on a alors :

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^s}(x) = B^s + O(||x||), \quad \frac{\partial f^u}{\partial x^u}(x) = B^u + O(||x||),$$

et aussi :

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^u}(x) = O(||x^s||), \quad \frac{\partial f^u}{\partial x^s}(x) = O(||x^u||).$$

Les deux premières égalités impliquent que, si on choisit le voisinage U assez petit, il existe des constantes $b_u > 1$ et $0 < b_s < 1$ telles que :

$$||\frac{\partial f^s}{\partial x^s}(x)|| \leq b_s, \quad ||\frac{\partial f^u}{\partial x^u}(x)|| \geq b_u, \tag{3.11}$$

et aussi :

$$||f^s(x)|| \leq b_s||x^s||, \quad ||f^u(x)|| \geq b_u||x^u||. \tag{3.12}$$

De même, les deux dernières égalités impliquent, par la formule des accroissements finis appliquée à $\frac{\partial f^s}{\partial x^u}$ (resp. $\frac{\partial f^u}{\partial x^s}$), compte tenu de $\frac{\partial f^s}{\partial x^u}(0, x^u) = 0$ (resp. $\frac{\partial f^u}{\partial x^s}(x^s, 0) = 0$), qu'il existe des constantes $k, K > 0$ telles que :

$$||\frac{\partial f^s}{\partial x^u}(x)|| \leq k||x^s||, \quad ||\frac{\partial f^u}{\partial x^s}(x)|| \leq k||x^u|| \leq K. \tag{3.13}$$

Si $h = f^{-1} = (h^s, h^u)$, on déduit de la deuxième inégalité (3.12) l'estimation :

$$||h^u(x)|| \leq b_u^{-1}||x^u||. \tag{3.14}$$

Considérons maintenant un d_s-plan Π dans l'espace tangent $T_xU = \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$, qui soit transverse à la direction stable $\mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}$. Un tel plan peut être vu comme l'image d'une application linéaire $L_\Pi : \mathbb{R}^{d_u} \mapsto \mathbb{R}^{d_s}$.

Définition 3.8. On définit la *pente* de Π par :

$$p(\Pi) = \text{Sup}\left\{ \frac{||v||}{||w||} \;\middle|\; (v,w) \in \Pi, w \neq 0 \right\}.$$

Cette pente est égale à la norme $||L_\Pi||$ de l'application linéaire L_Π associée à Π, qui est définie par :

$$||L_\Pi|| = \text{Sup}\left\{ \frac{||v||}{||w||} \;\middle|\; v = L_\Pi(w),\ w \in \mathbb{R}^{d_u},\ w \neq 0 \right\}.$$

Évidemment $p(\Pi) = 0$ si et seulement si $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^{d_u}$. Pour démontrer le λ-Lemma, on va considérer l'action de f sur les plans tels que Π, transverses à la direction de $\mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}$. Le difféomorphisme f agit sur les plans de l'espace tangent via sa différentielle. Si $(v,w) \in \Pi$ et $Df(x)((v,w)) = (V,W)$, on a $||V|| \leq b_s||v|| + k||x^s|| \cdot ||w||$ et $||W|| \geq |b_u||w|| - k||x^u|| \cdot ||v|||$.

Posons : $\lambda = p(\Pi)$ et $\Lambda = p(Df(x)[\Pi])$. On a l'inégalité :

$$\Lambda \leq \frac{b_s\lambda + k||x^s||}{|b_u - k||x^u|| \cdot \lambda|} \leq \frac{b_s\lambda + k||x^s||}{|b_u - K\lambda|}. \tag{3.15}$$

Supposons que l'on choisisse un plan Π_0, de pente λ_0, en un point $x_0 = (x_0^s, x_0^u)$, et que l'on puisse itérer $n+1$ fois l'action de f sur les plans transverses au facteur $\mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}$, à partir de ce plan Π_0. L'itération de (3.12) donne que, si x_l^s est la x^s-composante de $f^l(x_0^s, x_0^u)$ on a

$$||x_l^s|| \leq ||x_0^s||b_s^l.$$

Il en résulte la relation de récurrence suivante sur les pentes $\lambda_l, 0 \leq l \leq n$, des plans obtenus :

$$\lambda_{l+1} \leq \frac{b_s\lambda_l + k||x_0^s||b_s^l}{|b_u - K\lambda_l|}. \tag{3.16}$$

Dans le cas particulier où $x_0 \in W^s_{\text{loc}}(p_0)$, la composante x^u du point itéré demeure nulle, si $x^u = 0$ on peut prendre $K = 0$ dans (3.13), et la relation de récurrence se réduit à :

$$\lambda_{l+1} \leq \frac{b_s}{b_u}\lambda_l + \frac{k||x_0^s||}{b_u} b_s^l. \tag{3.17}$$

Dans le prochain paragraphe, nous allons étudier ces relations de récurrence.

3.4.2. Suites convergentes

Lemme 3.1. *Soit des constantes a, b telles que $0 < a < b < 1$ et $M > 0$. On considère une suite de nombres positifs $(\lambda_n)_n$, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_{n+1} \leq a\lambda_n + Mb^n.$$

Soit $\tilde{K}_1 = \text{Sup}\{\lambda_0, \frac{M}{b-a}\}$. Alors on a : $\lambda_n \leq \tilde{K}_1 b^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la convergence vers 0 de la suite $(\lambda_n)_n$ est majorée géométriquement).

Démonstration. Si $\tilde{K}_1 = \text{Sup}\{\lambda_0, \frac{M}{b-a}\}$, on a évidemment $\lambda_0 \leq \tilde{K}_1 = \tilde{K}_1 b^0$. Supposons, par récurrence, que $\lambda_n \leq \tilde{K}_1 b^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\lambda_{n+1} \leq a\tilde{K}_1 b^n + Mb^n = (a\tilde{K}_1 + M)b^n.$$

Comme par hypothèse $(a\tilde{K}_1 + M) \leq b\tilde{K}_1$, on a $\lambda_{n+1} \leq \tilde{K}_1 b^{n+1}$. ∎

Lemme 3.2. *Soit des constantes b, c telles que $0 < b < 1 < c$ et $\tilde{M}, K \geq 0$. Soit un $\Lambda > 0$ tel que $c - K\Lambda > 1$, et supposons que $\tilde{M} \leq (1-b)\Lambda$. Soit une suite de nombres positifs $(\lambda_n)_n$ vérifiant $\lambda_0 \leq \Lambda$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_{n+1} \leq \frac{b\lambda_n + \tilde{M}b^n}{|c - K\lambda_n|}. \tag{3.18}$$

Soit $\tilde{K}_2 = \text{Sup}\{\Lambda, \frac{\tilde{M}}{b(c-K\Lambda-1)}\}$. Alors on a : $\lambda_n \leq \tilde{K}_2 b^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la convergence vers 0 de la suite $(\lambda_n)_n$ est majorée géométriquement).

Démonstration. Soit une suite $(\lambda_n)_n$ comme dans l'énoncé. Montrons tout d'abord que $\lambda_n \leq \Lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a par hypothèse $\lambda_0 \leq \Lambda$. Supposons par récurrence que $\lambda_n \leq \Lambda$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, compte tenu de l'hypothèse sur $\tilde{M}$,

$$\lambda_{n+1} \leq \frac{b\Lambda + \tilde{M}b^n}{c - K\Lambda} \leq b\Lambda + \tilde{M} \leq \Lambda$$

puisque $0 < b < 1$ et que $c - K\Lambda > 1$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, on a donc : $\lambda_{n+1} \leq \frac{b\lambda_n + \tilde{M}b^n}{c-K\Lambda}$. On peut alors appliquer le lemme 3.1 avec $a = \frac{b}{c-K\Lambda} < b$ et $M = \frac{\tilde{M}}{c-K\Lambda}$ (ce qui fournit la valeur $\tilde{K}_2$ donnée dans l'énoncé). ■

Remarque 3.10. Le lemme 3.1 peut être vu comme un cas particulier du lemme 3.2. En effet, si dans le lemme 3.2, on prend $K = 0$, on est dans les conditions du lemme 3.2. En fait, sous cette hypothèse $K = 0$, on peut choisir Λ arbitrairement grand et donc en particulier tel que $\lambda_0 \leq \Lambda$: on a alors la conclusion du lemme 3.1.

Revenons maintenant au difféomorphisme f. Considérons un voisinage $W^s \times W^u \subset \mathrm{Int}(U)$, vérifiant (3.8). Soit $g : W^u \mapsto W^s$ une application $\mathcal{C}^\infty$, et notons $\mathrm{Graphe}(g)$ le graphe de g. Ce graphe est une sous-variété difféomorphe à W^u (voir l'exemple 7 du paragraphe I-2.2.3).

Supposons qu'en chaque point $x^u \in W^u$, le plan tangent à $\mathrm{Graphe}(g)$ soit transverse à la direction de $\mathbb{R}^s \times \{0\}$. Le lemme 3.2 a pour conséquence que, si la norme $||g||^1_{W^u}$ est assez petite, alors $f(\mathrm{Graphe}(g))$ est aussi transverse en chaque point à la direction de $\mathbb{R}^s \times \{0\}$ (les normes $||\cdot||^r_D$ ont été définies au début du paragraphe pour un disque $D \subset \mathbb{R}^{d_u}$ quelconque, en particulier pour $D = W^u$). Cette sous-variété $f(\mathrm{Graphe}(g))$ est alors un graphe au-dessus du domaine $W_g \subset (\{0\} \times D^u) \cap U$, projection de $f(\mathrm{Graphe}(g))$ sur $\{0\} \times D^u$. Si la norme $||g||^0_{W^u}$ est assez petite (*a fortiori*, par la définition (3.10) de la norme, si $||g||^1_{W^u}$ est assez petite !), en raison de la condition (3.8), on a $W^u \subset W_g$. En combinant ces deux idées, on voit que si $||g||^1_{W^u}$ est assez petite, l'image $f(\mathrm{Graphe}(g))$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ que l'on peut restreindre à W^u. Rappelons (paragraphe 3.3.1) que l'on définit de cette façon l'application *transformation de graphe* : $g \mapsto \mathcal{T}_{f,W^u}(g)$.

Nous voulons maintenant utiliser l'inégalité (3.16) pour appliquer le lemme 3.2 à partir de la pente $\lambda_0 = ||g||^1_{W^u}$. On applique le lemme avec $b = b_s, c = b_u$, et, pour k, K, les constantes introduites dans les inégalités (3.13). On choisit une constante Λ telle que $b_u - K\Lambda > 1$, c'est-à-dire

$$\Lambda < \frac{b_u - 1}{K}. \tag{3.19}$$

On prend $\widetilde{M} = k||g||^0_{W^u}$ (car $||g||^0_{W^u}$, joue le rôle de $||x^s_0||$). L'hypothèse $\widetilde{M} \leq (1 - b_s)\Lambda$ du lemme 3.2 se réduit à :

$$||g||^0_{W^u} \leq \frac{1 - b_s}{k}\Lambda. \tag{3.20}$$

La condition initiale $\lambda_0 \leq \Lambda$ se réduit à

$$||g||^1_{W^u} \leq \Lambda. \tag{3.21}$$

Par la définition de la norme (3.10) on a $||g||^0_{W^u} \leq ||g||^1_{W^u}$, on peut donc remplacer les trois conditions (3.19), (3.20) et (3.21) ci-dessus par les deux conditions :

$$||g||^1_{W^u} \leq \Lambda_1, \tag{3.22}$$

et

$$\Lambda_1 < \Lambda \cdot \mathrm{Inf}\left\{1, \frac{1-b_s}{k}\right\}, \tag{3.23}$$

avec Λ vérifiant (3.19). En effet, sous les conditions (3.22) et (3.23), les deux conditions (3.20) et (3.21) sont vérifiées.

Par le lemme 3.2 il existe alors une constante $K_1 > 0$ (dépendante *a priori* de W^u), telle que si $||g||^1_{W^u} \leq \Lambda_1$, on puisse itérer indéfiniment $\mathcal{T}_{f,W^u}$ à partir de g et que d'autre part $||\mathcal{T}^n_{f,W^u}(g)||^1_{W^u} \leq K_1 b^n_s$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut résumer ces considérations dans la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Soit un voisinage $W^s \times W^u \subset \mathrm{Int}(U)$ vérifiant (3.8) et désignons par $\mathcal{C}^\infty(W^u, E^s)$ l'espace de Fréchet des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de W^u à valeurs dans E^s.*

Soit Λ une constante telle que $\Lambda < (b_u - 1)/K$. On suppose que la constante $\Lambda_1(W^u)$ vérifie $\Lambda_1(W^u) < \Lambda \mathrm{Inf}\{1, \frac{1-b_s}{k}\}$, où b_s, b_u, k, K sont les constantes introduites dans le paragraphe 3.4.1.

Soit

$$\mathcal{B}_{\Lambda_1} = \{g \in \mathcal{C}^\infty(W^u, E^s) \mid ||g||^1_{W^u} \leq \Lambda_1(W^u)\},$$

alors il existe une constante $K_1(W^u) > 0$ (dépendante a priori de W^u) telle que, si on peut définir $\mathcal{T}_{f,W^u} : \mathcal{B}_{\Lambda_1} \mapsto \mathcal{B}_{\Lambda_1}$ par la formule de transformation de graphe :

$$\mathrm{Graphe}(\mathcal{T}_{f,W^u}(g)) = f(\mathrm{Graphe}(g)) \cap (W^s \times W^u), \ \forall g \in \mathcal{B}_{\Lambda_1},$$

on ait, pour tout $g \in \mathcal{B}_{\Lambda_1}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $||\mathcal{T}^n_{f,W^u}(g)||^1_{W^u} \leq K_1(W^u) b^n_s$.

Supposons maintenant, comme c'est le cas dans ce paragraphe, que le graphe de g soit contenu dans $f^{n_0}(N)$ où N est une sous-variété transverse à $D^s \times \{0\}$, que l'on suppose être un graphe au-dessus d'un disque de D^u et $n_0 \in \mathbb{N}$. Posons $g_n = \mathcal{T}^{n-n_0}_{f,W^u}(g)$ $(g_0 = g)$ et $P_n = f^{-n}(\mathrm{Graphe}(g_{n-n_0}))$ pour $n \geq n_0$. On a alors :

Proposition 3.6. *Soit $(P_n)_{n \geq n_0}$ la suite de sous-variétés définie ci-dessus, suite associée à une application g telle que $||g||^1_{W^u} \leq \Lambda_1(W^u)$ comme dans la proposition 3.5.*

Les P_n sont des sous-variétés (difféomorphes au disque D^u) emboîtées : $\ldots \subset P_{n+1} \subset P_n \subset \ldots \subset P_{n_0} \subset N$. Il existe une constante $K_2 > 0$ telle que $\mathrm{Diam}(P_n) \leq K_2 b_u^{-n-n_0}$ pour $n \geq n_0$ (si K est un compact de $D^s \times D^u$, on définit son diamètre par $\mathrm{Diam}(K) = \mathrm{Sup}\{||y - x|| \mid (x, y) \in K \times K\}$).

Démonstration. Comme g_{n+1} se déduit par transformation de graphe de g_n, il est clair que les sous-variétés P_n sont emboîtées. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x = (x^s, x^u) \in \text{Graphe}(g_n)$. Posons $x_n = (x_n^s, x_n^u) = f^{-n-n_0}(x) \in P_{n_0+n}$. Par itération de l'inégalité (3.14), on a :

$$||x_n^u|| \leq ||x^u|| b_u^{-n-n_0}. \tag{3.24}$$

Comme la sous-variété N est un graphe au-dessus d'un disque D_N^u de D^u, la projection $x_n \in N \mapsto x_n^u \in D_N^u$ est un difféomorphisme. Il en résulte qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\text{Diam}(P_n) \leq M \text{Sup}\{||y_n^u - x_n^u|| \mid (x, y) \in \text{Graphe}(g_n) \times \text{Graphe}(g_n)\},$$

où on a posé $x_n = (x_n^s, x_n^u) = f^{-n-n_0}(x)$ et $y_n = (y_n^s, y_n^u) = f^{-n-n_0}(y)$. Par l'inégalité triangulaire, on a $||y_n^u - x_n^u|| \leq ||x_n^u|| + ||y_n^u||$. Il suit alors de l'inégalité (3.24) appliquée à x_n^u et y_n^u :

$$\text{Diam}(P_n) \leq 2M \text{Diam}(W^u) b_u^{-n-n_0},$$

ce qui est l'inégalité souhaitée avec $K_2 = 2M\text{Diam}(W^u)$. ■

3.4.3. Énoncés et preuves du λ-Lemma

Cas d'un difféomorphisme

Théorème 3.5. *(λ-Lemma pour une variété stable locale de difféomorphisme) Soit f un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U d'un point hyperbolique p_0 de type selle. On suppose choisies sur U, comme plus haut, des coordonnées $(x^s, x^u) \in R^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$, pour lesquelles les variétés invariantes locales sont définies par : $W^u_{\text{loc}}(f, p_0) = U \cap \{x^s = 0\}$ et $W^s_{\text{loc}}(f, p_0) = U \cap \{x^u = 0\}$. On choisit des disques $D^s \subset \mathbb{R}^s$ et $D^u \subset \mathbb{R}^u$ centrés à l'origine de $\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^u$, tels que $D^s \times D^u \subset U$, et vérifiant (3.8) et (3.9).*

Soit N une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, difféomorphe au disque de dimension d_u, plongée dans $D^s \times D^u$, et coupant $D^s \times \{0\}$ transversalement en un unique point q, intérieur à N. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $P_n = f^{-n}(Q_n)$ où Q_n est la composante connexe du point $f^n(q)$ dans $f^n(N) \cap (D^s \times D^u)$. On a les propriétés suivantes :

1. *Il existe un n_0 (dépendant de N) tel que, pour $n \geq n_0$, les P_n sont des sous-variétés (difféomorphes au disque D^u) emboîtées : $\ldots \subset P_{n+1} \subset P_n \subset \ldots \subset N$, dont le diamètre tend vers 0 quand $n \to +\infty$; $Q_n = f^n(P_n)$ est le graphe d'une fonction $g_n(x^u) : D^u \mapsto D^s$, de classe $\mathcal{C}^\infty$; le diamètre des P_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.*

2. *La suite (g_n) tend vers l'application nulle dans l'espace de Fréchet : $\mathcal{C}^\infty(D^u, E^s)$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ de D^u dans E^s. Cela signifie que la suite $(||g_n||^l_{D^u})_n$ tend vers 0 pour tout $l \in \mathbb{N}$, ou, ce qui est équivalent, que pour tout multi-indice $j = (j_1, \ldots, j_{d_u})$, on a $\partial^j g_n(x^u) \to 0$, quand $n \to +\infty$, uniformément par rapport à $x^u \in D^u$ (voir la définition de la notation $\partial^j \varphi_0$ dans le chapitre I-3).*

On peut remplacer la donnée initiale d'une seule sous-variété N, par la donnée d'une famille compacte N_z de telles sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ dépendant continûment d'un paramètre $z \in K$, où K est un espace compact. Une telle famille est donnée par une application $G_z(p) : (z, p) \in K \times D^u \mapsto U$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en p pour z fixé, et telle que $z \mapsto G_z$ soit continue de K à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(D^u, E^s)$. Les résultats énoncés ci-dessus sont alors vérifiés de façon uniforme en z.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous allons nous contenter de démontrer le résultat pour une sous-variété N ne dépendant pas d'un paramètre, mais la preuve à paramètre ne présente pas de difficultés supplémentaires. Nous allons présenter la preuve en plusieurs étapes.

Première étape : *Si N est comme dans l'énoncé, il suffit de prouver le résultat pour une sous-variété $\tilde{N} \subset N$ quelconque, voisinage compact de q dans N, difféomorphe au disque de dimension d_u (par exemple, $\tilde{N}$ peut être choisie de diamètre arbitrairement petit).* En effet, supposons le résultat démontré pour une telle sous-variété $\tilde{N}$. Si $\tilde{Q}_n$ est la composante connexe du point $f^n(q)$ dans $f^n(\tilde{N}) \cap (D^s \times D^u)$, c'est aussi la composante connexe du point $f^n(q)$ dans $f^n(N) \cap (D^s \times D^u)$. Il en résulte que la suite des $\tilde{Q}_n$ donne le résultat pour N. Notez que la valeur n_0 augmente quand le diamètre de $\tilde{N}$ diminue.

Deuxième étape : *Construction d'un $\tilde{N}_0 \subset N$, dont un itéré vérifie les hypothèses du lemme 3.2.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'itération du point $q = (q^s, 0) = N \cap (D^s \times D^u)$: $q_n = (q^s_n, 0) = f^n(q)$. Par application itérée de l'inégalité (3.12), on a :

$$||q^s_n|| \leq ||q^s|| b^n_s. \tag{3.25}$$

Désignons par λ_n la pente du plan tangent $T_{q_n}[f^n(N)] = df^n_q[T_q N]$ (ce plan est tranverse à $D^s \times \{0\}$ pour tout n, car cette transversalité est vérifiée pour $n = 0$ par hypothèse, et $D^s \times \{0\}$ est invariant par itération). L'inégalité (3.17) permet d'appliquer le lemme 3.1 avec

$$a = \frac{b_s}{b_u},\ b = b_s \ \text{ et } \ M = \frac{k||q^s||}{b_u}.$$

On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_n \leq \tilde{K}_1 b_s^n$ avec $\tilde{K}_1 = \mathrm{Sup}\{\lambda_0, \frac{k||q^s||}{b_s(b_u-1)}\}$. Nous allons choisir un $\tilde{n}_0$ assez grand pour pouvoir appliquer, grâce à l'inégalité (3.15), le lemme 3.2 à la pente $\lambda_{\tilde{n}_0}$. Pour cela, on pose :

$$b = b_s,\ c = b_u,\ \tilde{M} = k||q^s_{n_0}||,\ K = K.$$

On choisit Λ telle que $c - K\Lambda > 1$, c'est-à-dire telle que :

$$\Lambda < \frac{b_u - 1}{K}. \tag{3.26}$$

Compte tenu de (3.25), la condition $\tilde{M} < (1-b)\Lambda$ est vérifiée si $\tilde{n}_0$ est assez grand pour que $||q^s||b_s^{\tilde{n}_0} < \frac{(1-b_s)\Lambda}{k}$. La condition sur la pente : $\lambda_{\tilde{n}_0} < \Lambda$ sera vérifiée si $\tilde{K}_1 b_s^{\tilde{n}_0} < \Lambda$ où $\tilde{K}_1$ est la constante définie ci-dessus. Au total, il suffit de prendre $\tilde{n}_0$ assez grand pour que

$$b_s^{\tilde{n}_0} < \Lambda \cdot \mathrm{Inf}\left\{\frac{1}{\tilde{K}_1}, \frac{1-b_s}{k||q^s||}\right\}.$$

Par continuité, il existe un voisinage $\tilde{N}_0 \subset D^s \times D^u$ de $q_{\tilde{n}_0}$ dans $f^{\tilde{n}_0}(N)$, difféomorphe à un disque, tel que, en tout $x \in \tilde{N}_0$, le plan tangent $T_x\tilde{N}_0$ soit transverse à la direction $\mathbb{R}^s \times \{0\}$. Cela signifie que $\tilde{N}_0$ est le graphe d'une application $G_0 : W_0 \mapsto E^s$, où W_0 est un voisinage de 0 dans D^u. Désignons par $\lambda_0(x)$ la pente du plan tangent $T_x\tilde{N}_0$. On peut choisir le diamètre de $\tilde{N}_0$ assez petit pour que :

$$\lambda_0(x) \leq \Lambda,\ \forall x \in \tilde{N}_0. \tag{3.27}$$

On va maintenant itérer f à partir des points de $\tilde{N}_0$. Posons $\tilde{N}_n = f^n(\tilde{N}_0) \cap (D^s \times D^u)$. Par application du lemme 3.2, $\tilde{N}_n$ est aussi un graphe d'une application $G_n : W_n \mapsto E^s$, où W_n est une sous-variété de D^u. Il suit aussi du lemme 3.2 que $||G_n||_{W_n,1} \to 0$ pour $n \to +\infty$. D'autre part, comme f dilate la composante x^u d'après (3.12), il existe un voisinage compact W de $0 \in D^u$, qui est contenu dans chaque W_n.

Troisième étape : *Preuve du λ-Lemma en classe $\mathcal{C}^1$.*

Rappelons que l'on veut montrer le résultat pour un produit quelconque de disques : $D^s \times D^u \subset U$, vérifiant la condition (3.8). Ce qui précède montre la convergence des itérés de N au-dessus d'un voisinage W de 0 dans D^u : en effet, puisque $||G_n||^1_{W_n} \to 0$ on a, *a fortiori*, la convergence pour les restrictions à W : $||G_n|_W||^1_W \to 0$ pour $n \to +\infty$. Nous désignerons $G_n|_W$ simplement par G_n. Nous allons maintenant montrer comment passer de W à D^u.

Topologie de Hausdorff

Tout d'abord, nous avons besoin de rappeler quelques faits élémentaires sur la distance de Hausdorff entre compacts d'un espace métrique. Soit donc M un espace métrique de distance d. Désignons par $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble de toutes les parties compactes non vides de M. On munit cet ensemble d'une métrique d_H, dite métrique de Hausdorff, par

$$d_H(L,K) = \mathrm{Inf}_{(x,y)\in K\times L}\Big\{\mathrm{Sup}_{z_1\in L}\{d(x,z_1\}, \mathrm{Sup}_{z_2\in K}\{d(z_2,y\}\Big\}.$$

Une manière plus parlante d'introduire cette métrique est de dire que $d_H(L,K)\leq\varepsilon$ si et seulement si K est contenu dans le ε-voisinage de L, *et* que L est contenu dans le ε-voisinage de K. La distance de Hausdorff d_H dépend évidemment de la distance d, mais la topologie qu'elle définit sur $\mathcal{C}(M)$ ne dépend que de la topologie de M (et non de la distance d considérée). Nous parlerons de la topologie de Hausdorff définie sur $\mathcal{C}(M)$. Il est facile de démontrer que, si f est une application continue entre deux espaces métriques M et N, alors cette application induit une application *continue* entre $\mathcal{C}(M)$ et $\mathcal{C}(N)$, définie par $K\in\mathcal{C}(M)\mapsto f(K)\in\mathcal{C}(N)$. ■

Revenons à la preuve du λ-Lemma. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\tilde{W}=f^{-N}(D^u)\subset \mathrm{Int}(W)$. Comme $||G_n||^1_W\to 0$ on a, *a fortiori*, que $\mathrm{Graphe}(G_p|_W)$ tend au sens de Hausdorff vers W. Il en résulte que $f^{N+1}\big(\mathrm{Graphe}(G_p|_W)\big)\cap f(D^s\times D^u)$ tend au sens de Hausdorff vers $f(\{0\}\times D^u)$ quand $p\to+\infty$. Or $\{0\}\times D^u\subset f(\{0\}\times\mathrm{Int}(D^u))$ par (3.8). La convergence de $f^{N+1}\big(\mathrm{Graphe}(G_p|_W)\big)\cap f(D^s\times D^u)$ vers $f(\{0\}\times D^u)$ implique donc qu'il existe $p_1\in\mathbb{N}$ tel que, si $p\geq p_1$, la projection de $f^{N+1}(\mathrm{Graphe}(G_p|_W))$ sur l'espace $\{0\}\times E^u$ contienne le disque $\{0\}\times D^u$.

Remarquons que $f^{N+1}(\mathrm{Graphe}(G_p|_W))\subset\tilde{N}_{N+1+p}$, qui est le graphe de G_{N+1+p}. Le domaine de définition W_{N+1+p} de cette application est donc égal à D^u dès que $p\geq p_1$. En posant $n=N+1+p$, on a, de façon équivalente, $W_n=D^u$ dès que $n\geq N+1+p_1$.

Posons $g_n=G_{n-\tilde{n}_0}$ pour $n\geq\tilde{n}_1=\tilde{n}_0+N+1+p_1$. L'application g_n est définie sur D^u, et, de plus, $||g_n||_{D^u,1}\to 0$ pour $n\to+\infty$. De cette convergence, il suit que l'on peut donc trouver un $n_0\geq\tilde{n}_1$, pour lequel $||g_{n_0}||^1_{D^u}\leq\Lambda_1(D^u)$, où $\Lambda_1(D^u)$ est la constante introduite dans la proposition 3.5. On peut alors appliquer cette proposition à g_{n_0}. Il en résulte que :

$$||g_n||_{D^u,1}\leq K_1(D^u)b_s^{n-n_0}, \tag{3.28}$$

et donc on a la $\mathcal{C}^1$-convergence vers 0 de la suite des g_n. Notons :

$$P_n=f^{-n}(\mathrm{Graphe}(g_n))\subset N,$$

pour $n \geq n_0$. En vertu de la proposition 3.6, la suite des P_n vérifie le point 1. de l'énoncé.

Quatrième étape : *Preuve du λ-Lemma en classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Nous ne détaillerons la preuve que dans le cas des dimensions $d_s = d_u = 1$, en indiquant brièvement, à la fin, comment traiter le cas général. On va montrer que, pour tout $l \geq 1$, il existe une constante $K_l > 0$ telle que :

$$||g_n||^l_{D^u} \leq K_l b_s^n, \tag{3.29}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Procédons par récurrence sur l à partir de $l = 1$, cas pour lequel l'inégalité a été établie dans l'étape précédente. Rappelons aussi que l'on a choisi l'application g_{n_0} telle que $||g_{n_0}||^1_{D^u} \leq \Lambda_1(D^u)$, où $\Lambda_1(D^u)$ est la constante introduite dans la proposition 3.5. En vertu de cette proposition, on passe donc de g_n à g_{n+1} par la transformation de graphe au-dessus de D^u : $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_{f,D^u}$.

(a) *Dérivation de la transformation de graphe à l'ordre l*

Soit $\varphi : D^u \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ quelconque, à laquelle s'applique $\mathcal{T}_f$ et posons $\psi = \mathcal{T}_f(\varphi)$. La transformation de graphe est définie explicitement par :

$$f^s(\varphi(x^u), x^u) = \psi(f^u(\varphi(x^u), x^u)). \tag{3.30}$$

Nous allons tout d'abord estimer, par récurrence, la dérivée de ψ d'ordre l, en fonction des dérivées de φ d'ordre inférieur ou égal à l. En dérivant une fois, et sans indiquer les variables dans $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ pour simplifier, on obtient :

$$\psi'(f^u(\varphi, x^u)) = \frac{\dfrac{\partial f^s}{\partial x^s}(\varphi, x^u)\varphi' + \dfrac{\partial f^s}{\partial x^u}(\varphi, x^u)}{\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u}(\varphi, x^u) + \dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}(\varphi, x^u)\varphi'}. \tag{3.31}$$

On reconnaît, dans le terme de droite, la formule homographique qui a été étudiée dans le lemme 3.2 (φ' est la pente). Désignons par

$$H(x^u, \varphi, \varphi') = \frac{N(x^u, \varphi, \varphi')}{D(x^u, \varphi, \varphi')}$$

cette expression. Comme $\frac{\partial f^s}{\partial x^u}(0, x^u) \equiv 0$, il existe une fonction $f_1^s(x^s, x^u)$ telle que $\frac{\partial f^s}{\partial x^u}(x^s, x^u) = x^s f_1^s(x^s, x^u)$. On peut donc écrire

$$N(\varphi, x^u) = \frac{\partial f^s}{\partial x^s}(\varphi, x^u)\varphi' + f_1^s(\varphi, x^u)\varphi.$$

On a $\psi'' = \frac{\partial H}{\partial \varphi'}\varphi'' + \frac{\partial H}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial H}{\partial x^u}$. Il est facile de voir que $\frac{\partial H}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial H}{\partial x^u} = A_{20}(x^u, \varphi, \varphi')\varphi + A_{21}(x^u, \varphi, \varphi')\varphi'$, pour des fonctions $\mathcal{C}^\infty$: A_{20}, A_{21}. On en déduit que :

$$\psi'' = \frac{\dfrac{\partial f^s}{\partial x^s}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} - \dfrac{\partial f^s}{\partial x^u}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}}{\left(\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} + \dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}\varphi'\right)^2}\varphi'' + A_{20}(x^u, \varphi, \varphi')\varphi + A_{21}(x^u, \varphi, \varphi')\varphi'.$$

Désignons par $g^{(l)}$ la dérivée d'ordre l d'une fonction g ($g^{(1)} = g'$, $g^{(2)} = g''$). À partir de cette formule pour l'ordre 2, il est facile, par récurrence, de montrer, à tout ordre $l \geq 2$, que l'on a :

$$\psi^{(l)} = \frac{\dfrac{\partial f^s}{\partial x^s}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} - \dfrac{\partial f^s}{\partial x^u}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}}{\left(\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} + \dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}\varphi'\right)^l}\varphi^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} A_{li}(x^u, \varphi, \varphi', \varphi^{(l-1)})\varphi^{(i)}, \tag{3.32}$$

pour des fonction A_{li} de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec, par convention, $\varphi^{(0)} = \varphi$.

(b) *Convergence de la suite des dérivées d'ordre l des g_n*

Revenons maintenant à la suite (g_n). Pour tout $l \in \mathbb{N}$, posons :

$$\lambda_n^l = \mathrm{Sup}\{|g_n^{(l)}(x^u)| \mid x^u \in D^u\}.$$

Nous allons établir que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $K_l > 0$ telle que

$$\lambda_n^l \leq K_l b_s^n, \tag{3.33}$$

ce qui démontrera (3.29).

Cette inégalité implique, évidemment, la convergence (3.29) des suites de norme d'ordre l. Les cas $l = 0$ et $l = 1$ ayant été prouvés plus haut, nous allons établir cette formule par récurrence à partir de $l = 1$. Supposons donc des inégalités (3.33) établies jusqu'à un ordre $l - 1 \geq 1$. Remarquons qu'il suffit de prouver une inégalité (3.33) à l'ordre l à partir d'un certain $n(l)$ (on aura l'estimation à partir de $n = 1$ en changeant la valeur de la constante K_l). Par (3.32) on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_{n+1}^{(l)} = \frac{\dfrac{\partial f^s}{\partial x^s}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} - \dfrac{\partial f^s}{\partial x^u}\dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}}{\left(\dfrac{\partial f^u}{\partial x^u} + \dfrac{\partial f^u}{\partial x^s}g_n^{(1)}\right)^l}g_n^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} A_{li}(x^u, g_n, g_n^{(1)}, \ldots, g_n^{(l-1)})g_n^{(i)}. \tag{3.34}$$

Dans le premier terme de droite, la fonction A_l, en coefficient de $g_n^{(l)}$, est fonction de $(x^u, g_n, g_n^{(1)})$. Elle peut être écrite :

$$A_l\left(x^u, g_n, g_n^{(1)}\right) = \frac{\partial f^s}{\partial x^s}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^u}\right)^{1-l}\left(1+\frac{\partial f^u}{\partial x^s}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^u}\right)^{-1} g_n^{(1)}\right)^{-l} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\partial f^s}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial x^s}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^u}+\frac{\partial f^u}{\partial x^s} g_n^{(1)}\right)^{-l}.$$

Il en résulte, par les estimations (3.11) et (3.13), que la fonction A_l est bornée par :

$$|A_l(x^u, g_n, g_n^{(1)})| \leq b_s b_u^{1-l}(1 - K b_u^{-1}\lambda_n^1)^{-l} + kK\lambda_n^0(b_u - K\lambda_n^1)^{-l}.$$

Quand $n \to +\infty$, le terme de droite converge vers $b_s b_u^{1-l} < b_s$. Donc, il existe une constante a_l, $0 < a_l < b_s$ et $n(l) \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geq n(l)$ on ait $|A_l(x^u, g_n, g_n^{(1)})| \leq a_l$. Maintenant, en utilisant l'hypothèse de récurrence sur les suites $(\lambda_n^i)_n$, pour $0 \leq i \leq l-1$, on obtient qu'il existe une constante $M_l > 0$ telle que :

$$\left|\sum_{i=0}^{l-1} A_{li}(x^u, g_n, g^{[1]}, \ldots, g_n^{(l-1)}) g_n^{(i)}\right| \leq M_l b_s^n.$$

Finalement, on obtient sur la suite λ_n^l la formule de récurrence :

$$\lambda_{n+1}^l \leq a_l \lambda_n^l + M_l b_s^n, \tag{3.35}$$

pour $n \geq n(l)$, avec des constantes a_l, b_s vérifiant : $0 < a_l < b_s < 1$. On applique alors le lemme 3.1 pour obtenir (3.33) et le résultat de convergence pour la suite $(\lambda_n^l)_n$.

Pour des dimensions d_s, d_u quelconques, on doit raisonner sur les différentielles d'ordre l au lieu des dérivées. Si g_n est la suite d'applications considérée, on pose $\lambda_n^l = \mathrm{Sup}\{||D^l g_n(x^u)|| \mid x^u \in D^u\}$ (la définition de la norme $||D^l g_n(x^u)||$ a été rappelée au début de la section). On peut alors démontrer une inégalité analogue à (3.35), et on termine la preuve comme plus haut. ■

Remarque 3.11.

1. Le théorème 3.5 est local, car on y fait une approximation d'une variété invariante instable locale $\{0\} \times D^u$.

2. En remplaçant f par f^{-1}, on peut énoncer un résultat tout à fait analogue pour les applications $\varphi : D^s \mapsto D^u$, et les itérations par f^{-1}.

Cas d'un champ de vecteurs

Il est très facile de déduire, du théorème 3.5, une version du λ-Lemma valable pour les champs de vecteurs :

Théorème 3.6 **(λ-Lemma pour une variété invariante locale d'un champ).** *Soit X un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U d'un point hyperbolique p_0 de type selle, de flot $\varphi(t,x)=\varphi_t(x)$. On suppose choisies sur U des coordonnées $(x^s,x^u)\in R^{d_s}\times\mathbb{R}^{d_u}$, pour lesquelles les variétés invariantes locales sont définies par $W^u_{\rm loc}(X,p_0)=U\cap\{x^s=0\}$ et $W^s_{\rm loc}(X,p_0)=U\cap\{x^u=0\}$. On choisit des disques $D^s\subset\mathbb{R}^s$ et $D^u\subset\mathbb{R}^u$ centrés à l'origine de $\mathbb{R}^s,\mathbb{R}^u$, tels que $D^s\times D^u\subset U$.*

Soit N une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, difféomorphe au disque de dimension d_u, plongée dans $D^s\times D^u$, et coupant $D^s\times\{0\}$ transversalement en un unique point q, intérieur à N. Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, on considère $P_t=\varphi_{-t}(Q_t)$ où Q_t est la composante connexe de $\varphi_t(q)$ dans $\varphi_t(N)\cap(D^s\times D^u)$. On a les propriétés suivantes :

1. *Il existe un $t_0>0$ (dépendant de N) tel que, pour $t\geq t_0$, les P_t sont des disques emboîtés : $\ldots\subset P_t\subset P_{t'}\subset\ldots\subset N$ si $t_0\leq t'\leq t$; $Q_t=\varphi_t(P_t)$ est le graphe d'une fonction $g_t(x^u):D^u\mapsto D^s$, de classe $\mathcal{C}^\infty$; le diamètre de P_t tend vers 0 quand $t\to+\infty$.*

2. *On a : $g_t\to 0$ pour $t\to+\infty$, dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(D^u,E^s)$. Cela signifie que, pour tout muti-indice $j=(j_1,\ldots,j_{d_u})$, on a :*

$$\partial^j g_t(x^u)\to 0,$$

uniformément par rapport à $x^u\in D^u$, quand $t\to+\infty$.

On a un résultat similaire en renversant les rôles de X et $-X$, ainsi que ceux de D^u et D^s. Comme dans le théorème 3.5, on peut remplacer la donnée initiale de N par la donnée d'une famille continue N_z, paramétrée par $z\in K$, où K est un espace compact.

Démonstration. Ce théorème se ramène au théorème précédent sur les difféomorphismes. En effet, on va appliquer le théorème 3.5 au difféomorphisme φ_1 (c'est-à-dire au flot φ_t pour $t=1$), qui admet p_0 comme point fixe hyperbolique de type selle, avec les mêmes variétés invariantes locales que X. On considère comme condition initiale la famille compacte N_τ, où $\tau\in[0,1]$ et $N_\tau=\varphi_\tau(N)$. Pour le difféomorphisme φ_1 il existe des sous-variétés $\tilde{P}_{\tau,n}$ et des applications $\tilde{g}_{\tau,n}$, définies pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq n_0$, données par le théorème 3.5. Posons $t_0=n_0$. Pour tout $t\geq t_0$, en écrivant $t=[t]+\tau(t)$ avec $0\leq\tau(t)<1$, on définit $P_t=\tilde{P}_{\tau(t),[t]}$ et

$g_t = \tilde{g}_{\tau(t),[t]}$. En utilisant la commutativité $\varphi_{[t]} \circ \varphi_{\tau(t)} = \varphi_{\tau(t)} \circ \varphi_{[t]}$, on obtient que les deux familles P_t, g_t sont bien définies et vérifient les conclusions de l'énoncé. ■

On peut, évidemment, appliquer le théorème 3.5 aux points périodiques hyperboliques des difféomorphismes, ainsi qu'aux orbites périodiques hyperboliques de champs de vecteurs.

3.5. Feuilletages invariants locaux

3.5.1. Le cas des champs de vecteurs

Nous allons commencer par le cas des champs de vecteurs, car la construction des feuilletages est plus facile dans ce cas. Soit donc X un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété de dimension n, et p_0 un point singulier hyperbolique de type selle de ce champ. On choisit, comme plus haut, des coordonnées $(x^s, x^u) \in R^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$ sur un voisinage U de p_0, dans lesquelles $W^u_{\text{loc}}(X, p_0) = U \cap \{x^s = 0\}$ et $W^s_{\text{loc}}(X, p_0) = U \cap \{x^u = 0\}$ (on a donc $p_0 = \{x^s = 0\} \cap \{x^u = 0\}$).

***Théorème 3.7* (Existence de feuilletages invariants pour un champ).**
Soit X un champ de vecteurs comme ci-dessus, de flot $\varphi^X_t(x)$. Il existe une application $g^u(x^s, x^u) : D^s \times D^u \mapsto E^s = \mathbb{R}^s$ telle que $\big(g^u(x^s, x^u), x^u\big) \in U$ avec les propriétés suivantes :

1. *L'application $(x^s, x^u) \in D^s \times D^u \mapsto \big(g^u(x^s, x^u), x^u\big)$ est un homéomorphisme sur son image. Pour tout $x^s \in D^s$, l'application $g^u_{x^s} : x^u \mapsto g^u(x^s, x^u)$ est $\mathcal{C}^\infty$; l'application $x^s \mapsto g^u_{x^s}$ de D^s dans $\mathcal{C}^\infty(D^u, E^s)$ est continue.*
2. *$g^u(x^s, 0) = x^s$ pour tout $x^s \in D^s$; $g^u(0, x^u) = 0$ pour tout $x^u \in D^u$.*
3. *Désignons par $L_u(x^s) = \{\big(g^u(x^s, x^u), x^u\big) \in U \mid x^u \in D^u\}$. Alors pour tout $x^s \in D^s$, et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $L_u\big(\varphi^X_t(x^s)\big) \subset \varphi^X_t\big(L_u(x^s)\big)$.*

D'autre part, il existe une application $g^s(x^s, x^u) : D^s \times D^u \mapsto E^u = \mathbb{R}^u$ telle que $(x^s, g^s(x^s, x^u)) \in U$ avec les propriétés suivantes :

1. *L'application $(x^s, x^u) \in D^s \times D^u \mapsto \big(x^s, g^s(x^s, x^u)\big)$ est un homéomorphisme sur son image. Pour tout $x^u \in D^u$, l'application $g^s_{x^u} : x^s \mapsto g^s(x^s, x^u)$ est $\mathcal{C}^\infty$; l'application $x^u \mapsto g^u_{x^u}$ de D^u dans $\mathcal{C}^\infty(D^s, E^u)$ est continue.*
2. *$g^s(x^s, 0) = 0$ pour tout $x^s \in D^s$; $g^s(0, x^u) = x^u$ pour tout $x^u \in D^u$.*
3. *Désignons par $L_s(x^u) = \{\big(x^s, g^s(x^s, x^u)\big) \in U \mid x^s \in D^s\}$. Alors pour tout $x^u \in D^u$, et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $L_s\big(\varphi^X_{-t}(x^u)\big) \subset \varphi^X_{-t}\big(L_s(x^u)\big)$.*

Remarque 3.12. La collection des sous-variétés $L_u(x^s)$ (des disques de dimension d_u) définit un *feuilletage.* Ce feuilletage est appelé *feuilletage instable local* (de X au point p_0) et on le désignera par $\mathcal{F}^u(X, p_0)$. De même, la collection des sous-variétés $L_s(x^u)$ (des disques de dimension d_s) est un *feuilletage stable local* (au point p_0) que l'on désignera par $\mathcal{F}^s(X, p_0)$. En toute généralité, un feuilletage est une donnée globale, qui est défini par le recollement de domaines distingués munis de submersions g, similaires aux applications g^u, g^s introduites ici. Les sous-variétés L_s, L_u, appelées ici feuilles, sont en général appelées plaques, les feuilles étant obtenues par recollement de plaques de différents domaines distingués. On dit que le feuilletage est $\mathcal{C}^k$ si les submersions sont $\mathcal{C}^k$: les feuilles sont alors de classe $\mathcal{C}^k$, et dépendent de façon $\mathcal{C}^k$ d'un paramètre transverse. Remarquez que les feuilletages stable et instable, définis ici dans le théorème 3.7, ont des feuilles de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais qui dépendent seulement continûment d'un paramètre transverse. Ces feuilletages ne sont donc que topologiques. En fait, $\mathcal{F}^u(X, p_0)$ peut être choisi $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $W^u_{\text{loc}}(X, p_0)$. On peut faire la même remarque pour $\mathcal{F}^s(X, p_0)$.

On verra dans la preuve que la construction a une part d'arbitraire qui fait que ces feuilletages ne sont pas uniques en dehors des feuilles particulières $W^u_{\text{loc}}(X, p_0)$ et $W^s_{\text{loc}}(X, p_0)$.

Le feuilletage $\mathcal{F}^u(X, p_0)$ définit un fibré, au sens introduit dans le chapitre 2. L'espace total E^u de ce fibré est la réunion des feuilles, la base est le disque D^s, et la projection de E^u sur D^s est l'application π^u qui, à chaque feuille $L_u(x^s)$, associe le point $x^s \in D^s$. Ce fibré n'est pas différentiel au sens défini dans le chapitre 2, mais seulement topologique, car l'application π^u n'est pas, en général, $\mathcal{C}^\infty$ le long de $W^u_{\text{loc}}(X, p_0)$. On peut faire des considérations analogues pour le feuilletage stable $\mathcal{F}^s(X, p_0)$.

Preuve du théorème 3.7. Soit φ_t le flot de X. Nous allons nous limiter à construire un feuilletage local instable, car, pour construire un feuilletage stable, il suffit de remplacer X par $-X$. Pour faire cette construction, on va appliquer le théorème 3.6. Ce théorème nous donne un voisinage que l'on peut choisir d'être un produit de disques $\tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$. Nous prenons comme condition initiale la famille de disques plongés $N_z = \{z\} \times \tilde{D}^u$, avec $z \in K = \partial \tilde{D}^s$. Le théorème nous donne un t_0 tel que, pour tout $t \geq t_0$, il existe un sous-disque $P_{t,z} \subset N_z$, dont l'image $\varphi_t(P_{t,z})$ est un graphe $\tilde{D}^u \ni x^u \mapsto g_t(z, x^u)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui vérifie par construction :

$$g_t(z, 0) = \varphi_t(z). \tag{3.36}$$

Évidemment, on a choisi les disques $\tilde{D}^s$ et $\tilde{D}^u$ de façon que le champ X soit tranverse à leurs bords (voir la remarque 3.2). Considérons maintenant un disque $D^s \subset \tilde{D}^s$, tel que $D^s - \{0\}$ soit contenu dans la région $\{\varphi_t(z) \mid t \geq t_0,\ z \in \partial \tilde{D}^s\}$.

En conséquence de la transversalité de X à $\partial\tilde{D}^s$, chaque $x^s \in D^s - \{0\}$ s'écrit de façon unique

$$x^s = \varphi_{t(x^s)}(z(x^s)), \tag{3.37}$$

avec un temps $t(x^s) > 0$, et un $z(x^s) \in \partial\tilde{D}^s$. De plus $t(x^s)$ et $z(x^s)$ sont $\mathcal{C}^\infty$, comme conséquence du théorème des fonctions implicites appliqué à l'équation (3.37). On peut maintenant définir une application $g^u : (x^s, x^u) \in (D^s - \{0\}) \times \tilde{D}^u \mapsto g^u(x^s, x^u) \in E^s$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, en posant :

$$g^u(x^s, x^u) = g_{t(x^s)}(z(x^s), x^u),$$

et on prolonge g^u sur $\{0\} \times \tilde{D}^u$ par $g^u(0, x^u) = 0$, pour tout $x^u \in \tilde{D}^u$.

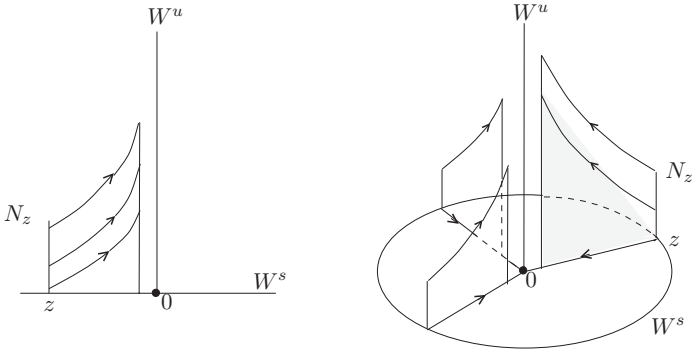


Figure 3.13. Figure de gauche : une feuille en dimension 2. Figure de droite : 3 feuilles en dimension 3. À chaque $z \in \partial\tilde{D}^s$ est attachée une feuille, chacune des trajectoires est associée à un $x \in \tilde{D}^u$.

On pose dorénavant $\tilde{D}^u = D^u$. L'application g^u ainsi définie a toutes les propriétés requises dans l'énoncé, en particulier $g^u(x^s, 0) = x^s$. En effet, ceci est vrai par définition si $x^s = 0$ et si $x^s \in D^s - \{0\}$ on a par (3.36) :

$$g^u(x^s, 0) = g_{t(x^s)}(z(x^s), 0) = \varphi_{t(x^s)}(z(x^s)) = x^s.$$

La seule propriété non triviale est le fait que l'application

$$(x^s, x^u) \in D^s \times D^u \mapsto \big(g^u(x^s, x^u), x^u\big),$$

soit un homéomorphisme (il pourrait se faire que deux feuilles assez voisines se coupent !). Pour avoir cette dernière condition, on remarque que l'on peut prendre t_0 arbitrairement grand. Comme le diamètre de $P_{t_0,z}$ tend vers 0 (uniformément en z), on peut choisir t_0 pour que le champ X soit transverse au cylindre $\cup_{z\in\partial\tilde{D}^s} P_{t_0,z}$

(cylindre, car c'est une surface difféomorphe au produit d'un cercle par un intervalle de $\mathbb{R}$). Comme $P_{t,z} \subset P_{t_0,z}$ pour $t \geq t_0$, cette transversalité reste vérifiée pour tout $t \geq t_0$. Fixons un $z \in \partial \tilde{D}^s$ quelconque, et considérons les feuilles $L^u_{\varphi_t(z)}$ engendrées par le transport des disques $P_{t,z}$: le transport par le flot envoie le disque $P_{t,z}$ sur la feuille $L^u_{\varphi_t(z)}$ et le champ X sur lui-même. Il s'ensuit que X, en restriction à la sous-variété $C_z = \cup_{t \geq t_0} L_{\varphi_t(z)}$, est transverse à chaque feuille $L^u_{\varphi_t(z)}$. Donc sur C_z, ces feuilles sont deux à deux disjointes. Comme les sous-variétés C_z sont elles-mêmes deux à deux disjointes, on obtient finalement que les feuilles $L^u(x^s)$, pour $x^s \in D^s$, sont deux à deux disjointes. Remarquez que la variété instable locale $\{0\} \times D^u$ est disjointe des autres feuilles car elle est invariante par le flot. Cette propriété implique que l'application g^u est injective. Cette application est d'autre part $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $\{x^s = 0\}$, et a été prolongée par continuité en $x^s = 0$. Comme $D^s \times D^u$ est compact, l'application g^u est donc un homéomorphisme (sur son image). On a illustré la construction de ces feuilletages invariants en dimensions 2 et 3, dans la figure 3.13. ■

3.5.2. Le cas des difféomorphismes

Soit maintenant f un difféomorphisme d'une variété M ayant en p_0 un point fixe hyperbolique de type selle. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on suppose choisi, comme plus haut, des coordonnées $(x^s, x^u) \in R^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$ sur un voisinage U de p_0, dans lesquelles $W^u_{\text{loc}}(p_0) = U \cap \{x^s = 0\}$ et $W^s_{\text{loc}}(p_0) = U \cap \{x^u = 0\}$. On choisit des disques $D^s \subset \mathbb{R}^s$ et $D^u \subset \mathbb{R}^u$ centrés à l'origine de $\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^u$, tels que $D^s \times D^u \subset U$. De plus, on choisit les disques D^u et D^s comme plus haut dans la formule (3.8), pour que $f(D^s \times \{0\}) \subset \text{int}(D^s \times \{0\})$ et $f^{-1}(\{0\} \times D^u) \subset \text{int}(\{0\} \times D^u)$.

Théorème 3.8 **(Existence de feuilletages invariants pour un difféomorphisme).**
Il existe une application $g^u(x^s, x^u) : D^s \times D^u \mapsto E^s = \mathbb{R}^s$ telle que $\big(g^u(x^s, x^u), x^u\big) \in U$, avec les propriétés suivantes :

1. *L'application $(x^s, x^u) \in D^s \times D^u \mapsto \big(g^u(x^s, x^u), x^u\big)$ est un homéomorphisme sur son image. Pour tout $x^s \in D^s$, l'application $g^u_{x^s} : x^u \mapsto g^u(x^s, x^u)$ est $\mathcal{C}^\infty$; l'application $x^s \mapsto g^u_{x^s}$ de D^s dans $\mathcal{C}^\infty(D^u, E^s)$ est continue.*

2. *$g^u(x^s, 0) = x^s$ pour tout $x^s \in D^s$; $g^u(0, x^u) = 0$ pour tout $x^u \in D^u$.*

3. *Désignons par $L_u(x^s) = \{\big(g^u(x^s, x^u), x^u\big) \in U \mid x^u \in D^u\}$. Alors, pour tout $x^s \in D^s$, on a $L_u\big(f(x^s)\big) \subset f\big(L_u(x^s)\big)$.*

D'autre part, il existe une application $g^s(x^s, x^u) : D^s \times D^u \mapsto E^u = \mathbb{R}^u$, telle que $(x^s, g^s(x^s, x^u)) \in U$, avec les propriétés suivantes :

1. *L'application* $(x^s, x^u) \in D^s \times D^u \mapsto \big(x^s, g^s(x^s, x^u)\big)$ *est un homéomorphisme sur son image. Pour tout* $x^u \in D^u$, *l'application* $g^s_{x^u} : x^s \mapsto g^s(x^s, x^u)$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *; l'application* $x^u \mapsto g^u_{x^u}$ *de* D^u *dans* $\mathcal{C}^\infty(D^s, E^u)$ *est continue.*

2. $g^s(x^s, 0) = 0$ *pour tout* $x^s \in D^s$ *;* $g^s(0, x^u) = x^u$ *pour tout* $x^u \in D^u$.

3. *Désignons par* $L_s(x^u) = \{\big(x^s, g^s(x^s, x^u)\big) \in U \mid x^s \in D^s\}$. *Alors, pour tout* $x^u \in D^u$, *on a* $L_s\big(f^{-1}(x^u)\big) \subset f^{-1}\big(L_s(x^u)\big)$.

Définition 3.9. La collection des sous-variétés $L_u(x^s)$ (des disques de dimension d_u) est un feuilletage instable local (au point p_0) que l'on désignera par $\mathcal{F}^u(f, p_0)$. De même la collection des sous-variétés $L_s(x^u)$ (des disques de dimension d_s) est un feuilletage stable local (au point p_0) que l'on désignera par $\mathcal{F}^s(f, p_0)$.

Démonstration. La preuve est assez similaire à celle faite pour le théorème 3.7, mais plus technique. Nous n'en donnerons pas tous les détails.

On applique le théorème 3.5 sur un rectangle $\tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$, en choisissant ces disques de façon à ce que f envoie $\tilde{D}^s$ dans son intérieur, et que f^{-1} envoie $\tilde{D}^u$ dans son intérieur (voir la proposition 3.2 : on prend par exemple un disque $\tilde{D}^s$ pour la norme utilisée dans la preuve de cette proposition 3.2 et pour laquelle on a $||f(x)|| \leq \mu||x||$ au voisinage de l'origine, pour un $\mu < 1$). Nous allons nous limiter à la construction du feuilletage instable local. On définit $K = \tilde{D}^s \setminus \mathrm{Int}(f(\tilde{D}^s))$. Le compact K est un domaine fondamental pour f en restriction à $W^s_{\mathrm{loc}}(p_0)$ (voir définition 3.5). Un tel domaine fondamental a la propriété que chaque orbite dans $W^s_{\mathrm{loc}}(p_0)$ coupe K au moins en un point : un point unique dans $\mathrm{Int}(K)$, ou bien en deux points, l'un dans $\partial\tilde{D}^s$ et l'autre dans $f(\partial\tilde{D}^s)$.

On choisit maintenant une condition initiale N_z, paramétrée par $z \in K$, qui soit compatible avec f sur ∂K. Pour construire un feuilletage tel que $L_u(x^s)$ dépende de façon $\mathcal{C}^0$ de x^s, on doit choisir $N_z = \{z\} \times \tilde{D}^u$ et $N_{f(z)} = f(\{z\} \times \tilde{D}^u) = f(N_z)$ pour $z \in \partial\tilde{D}^s$ (figure 3.14). On prolonge ensuite N_z de façon $\mathcal{C}^\infty$ pour les $z \in \mathrm{Int}(K)$ et aussi de façon à ce que les N_z soient deux à deux disjointes. En utilisant un théorème de recollement de Whitney (voir l'appendice de [1] par exemple), on peut même faire en sorte que le feuilletage soit $\mathcal{C}^\infty$ le long de chaque $f^p(\partial\tilde{D}^s)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc soit $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $W^u_{loc}(p_0)$; si le choix de N_z est fait sans autre précaution que la condition de compatibilité ci-dessus, le recollement ne sera que $\mathcal{C}^0$ en général. La suite de la preuve est maintenant tout à fait comparable à celle proposée au théorème 3.7. On construit une application g^u sur $D^s \times D^u$, où D^s est un petit sous-disque de $\tilde{D}^s$, et $D^u = \tilde{D}^u$. En fait, la propriété selon laquelle les feuilles $L_u(x^s)$ sont deux à deux disjointes pour les

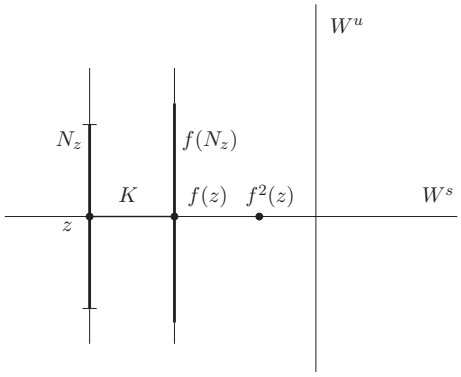


Figure 3.14. Le domaine fondamental $K \subset W^s$, N_z et $f(N_z)$ sont indiqués en traits épaissis.

$x^s \in D^s$ suit, immédiatement, de cette même propriété imposée aux conditions initiales N_z pour les $z \in K$. ■

Remarque 3.13. Dans cette remarque, on considère indifféremment un champ ou un difféomorphisme (on n'indiquera pas explicitement ce champ ou ce difféomorphisme dans les écritures).

1. Si $\tilde{D}^u \subset D^u$ et $\tilde{D}^s \subset D^s$ sont des sous-disques choisis assez petits, alors, pour tout $(x^s, x^u) \in \tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$, la feuille stable $L_s(x^u)$ coupe transversalement la feuille instable $L_u(x^s)$ *en un point et un seul.* Cela suit immédiatement des propriétés des fonctions g^u, g^s. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{W}}$ de tous ces points d'intersection est un voisinage compact de p_0. Soit $\tilde{L}_u(x^s) = L_u(x^s) \cap \widetilde{\mathcal{W}}$ et $\tilde{L}_s(x^u) = L_s(x^u) \cap \widetilde{\mathcal{W}}$ pour tout $(x^s, x^u) \in \tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$. Les $\tilde{L}_u(x^s)$ et $\tilde{L}_s(x^u)$ sont des sous-variétés difféomorphes à des disques de dimension d_u et d_s respectivement. En particulier, $\tilde{L}_u(0) = \{0\} \times \tilde{D}^u$ est la variété instable locale $W_{\mathrm{loc}}^{\widetilde{\mathcal{W}},u}$, et $\tilde{L}_s(0) = \tilde{D}^s \times \{0\}$ est la variété stable locale $W_{\mathrm{loc}}^{\widetilde{\mathcal{W}},s}$. Les deux collections $\tilde{L}_u(x^s)$ et $\tilde{L}_s(x^u)$ sont des feuilletages invariants locaux avec les même propriétés que celles des feuilletages $\mathcal{F}^u$ ou $\mathcal{F}^s$, avec l'avantage qu'ils sont définis sur le même voisinage :

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{loc}} = \cup_{x^s \in \tilde{D}^s} \tilde{L}_u(x^s) = \cup_{x^u \in \tilde{D}^s} \tilde{L}_s(x^u).$$

Ce voisinage bi-feuilleté est un voisinage de p_0, dans lequel les feuilles stables et instables forment un système de sous-variétés transverses, analogue au système formé par les disques $\tilde{D}^s \times \{x^u\}$ et $\{x^s\} \times \tilde{D}^u$ dans le produit $\tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$. Nous utiliserons cette remarque dans la prochaine section.

2. Si on examine la démonstration du théorème 3.7 pour la construction du feuilletage instable, on voit que l'on peut choisir pour condition initiale la donnée d'un feuilletage arbitraire de $\partial D^s \times D^u$ par des disques N_z indexé par $z \in \partial D^s$.

   Voici une conséquence très utile de cette remarque. Si l'on se donne une famille de sous-variétés deux à deux disjointes N_z, indexées par $z \in K$ (K compact de ∂D^s), telle que l'application $z \mapsto N_z$ soit continue (au sens de la $\mathcal{C}^\infty$-topologie des plongements du disque D^u dans $\partial D^s \times D^u$), on peut prolonger cette donnée en un feuilletage de $\partial D^s \times D^u$ (en utilisant un théorème classique de prolongement), puis appliquer le théorème 3.7 avec ce feuilletage comme condition initiale. On aura ainsi construit un feuilletage invariant local instable prolongeant la donnée des N_z avec $z \in K$.

3. On peut faire les mêmes remarques à propos de la construction du feuilletage local stable, et aussi à propos de la construction des feuilletages stable et instable locaux pour un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f. Dans ce dernier cas (feuilletage stable par exemple), on peut prolonger une donnée continue $z \mapsto N_z$, avec $z \in K$, où K est un compact, dans le domaine fondamental $D = \overline{\{0\} \times D^u \setminus f^{-1}(\{0\} \times D^u)}$, pourvu que cette donnée soit compatible avec les identifications induites par f sur le bord de D.

3.6. Linéarisation topologique locale

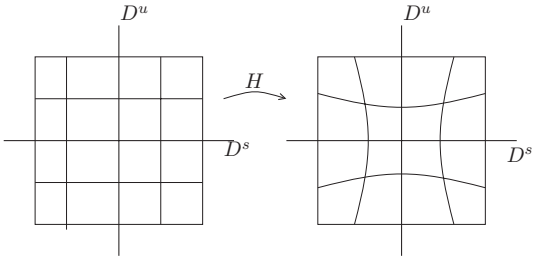


Figure 3.15

Nous avons déjà montré dans le paragraphe 3.2.1 qu'un champ de vecteurs, au voisinage d'un point singulier hyperbolique contractant, ou bien un difféomorphisme au voisinage d'un point fixe hyperbolique contractant, est topologiquement conjugué à sa partie linéaire. Nous allons utiliser l'existence des feuilletages invariants locaux, établie dans la section précédente, pour étendre ce résultat de conjugaison aux points de selle hyperboliques quelconques de champ de vecteurs ou de difféomorphisme.

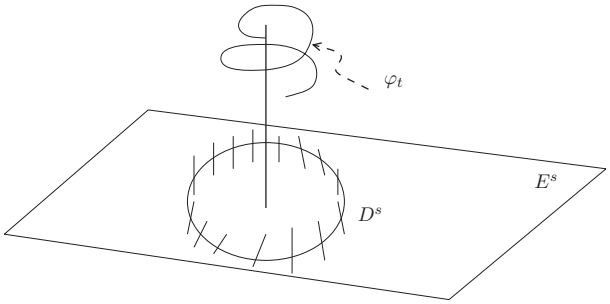


Figure 3.16

Théorème 3.9 **(Hartman-Grobman).** *Soit p_0 un point singulier hyperbolique d'un champ de vecteurs X sur une variété de dimension n. Écrivons X dans une carte quelconque au voisinage de p_0, où $p_0 = \{x = 0\}$: $X(x) = Ax + o(||x||)$. Alors, il existe un homéomorphisme H, défini sur un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$, avec $H(0) = p_0$, qui conjugue la partie linéaire A sur W avec X, sur le voisinage $H(W)$ de p_0. (Ce résultat est indépendant du choix de la carte, car un changement de carte change la partie linéaire par une conjugaison linéaire.)*

On a un résultat analogue pour un point fixe p_0 de difféomorphisme hyperbolique f : si dans une carte où $p_0 = \{x = 0\}$ le difféomorphisme s'écrit : $f(x) = Bx + o(||x||)$, alors f est localement topologiquement conjugué à sa partie linéaire B.

Démonstration. Nous n'allons traiter que le cas des champs de vecteurs, car celui des difféomorphismes se traite de façon complètement analogue. Comme dans la section 3.5.1, on choisit un voisinage U de p_0 avec des coordonnées $(x^s, x^u) \in \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$, dans lequel les variétés invariantes sont données par $W^u_{\text{loc}}(X, p_0) = U \cap \{x^s = 0\}$ et $W^s_{\text{loc}}(X, p_0) = U \cap \{x^u = 0\}$. La proposition 3.3 permet de choisir un disque $\tilde{D}^u \subset W^u_{\text{loc}}(X, p_0)$, et un homéomorphisme $h^u(x^u) : \tilde{D}^u \mapsto W^u_{\text{loc}}(X, p_0)$, qui conjugue la partie linéaire instable de X, sur $\tilde{D}^u$, avec X restreint à $D^u = h^u(\tilde{D}^u)$. De la même façon on trouve un disque $\tilde{D}^s \subset W^s_{\text{loc}}(X, p_0)$, et un homéomorphisme $h^s(x^u) : \tilde{D}^s \mapsto W^s_{\text{loc}}(X, p_0)$, qui conjugue la partie linéaire stable de X, sur $\tilde{D}^s$, avec X restreint à $D^s = h^s(\tilde{D}^s)$.

Quitte à restreindre D^u et D^s (ou, ce qui revient au même, $\tilde{D}^s$ et $\tilde{D}^u$), on peut appliquer à ces disques le théorème 3.7 : il existe des applications g^u, g^s sur $D^s \times D^u$, définissant une paire de feuilletages invariants locaux, le stable $\mathcal{F}^u(X, p_0)$ et l'instable $\mathcal{F}^s(X, p_0)$, dont les feuilles sont notées $L_u(x^s)$ pour $x^s \in D^s$, et $L_s(x^u)$ pour $x^u \in D^u$ respectivement (voir l'énoncé du théorème 3.7 pour plus de précisions). Comme $L_u(x^s)$ converge en classe $\mathcal{C}^1$ vers $\{0\} \times D^u$ quand $x^s \to 0$, et que $L_s(x^u)$ converge en classe $\mathcal{C}^1$ vers $D^s \times \{0\}$ quand $x^u \to 0$, on peut choisir

D^s et D^u pour que *chaque feuille du feuilletage stable* $\mathcal{F}^s(X,p_0)$ *coupe chaque feuille du feuilletage instable* $\mathcal{F}^u(X,p_0)$ *en un point et un seul*, comme dans la remarque 3.13. Cette propriété implique que l'on peut définir un homéomorphisme H de $\tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$ sur son image dans U en posant :

$$H(x^s,x^u) = L_s(h^u(x^u)) \cap L_u(h^s(x^s)). \tag{3.38}$$

La figure 3.17 illustre la relation (3.38).

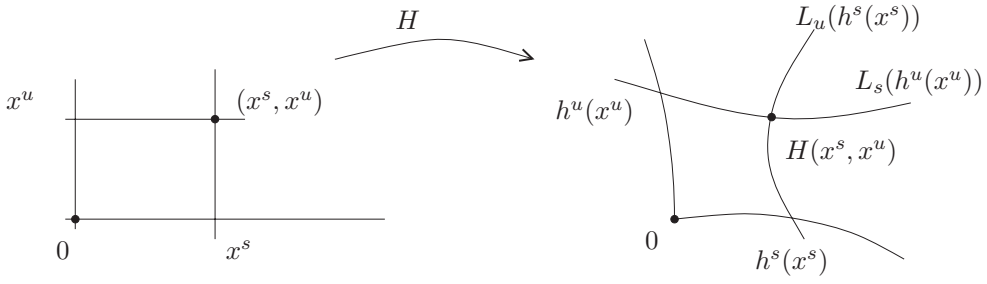


Figure 3.17

Il nous reste à montrer que H conjugue, sur $\tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$, le flot $\varphi^0(t,(x^s,x^u))$ de la partie linéaire X^0 de X, avec le flot $\varphi(t,(x^s,x^u))$ de X, à savoir :

$$H(\varphi^0(t,(x^s,x^u))) = \varphi(t,H(x^s,x^u)), \tag{3.39}$$

pour tout $(x^s,x^u) \in \tilde{D}^s \times \tilde{D}^u$.

Établissons cette formule (3.39). Le flot linéaire $\varphi^0(t,(x^s,x^u))$ se décompose en $\varphi^0(t,(x^s,x^u)) = (\varphi^0_s(t,x^s),\varphi^0_u(t,x^u))$. Notons aussi par $\varphi_s(t,x^s)$ et $\varphi_u(t,x^u)$ le flot de X, en restriction à $W^s_{\mathrm{loc}}(X,p_0)$ et à $W^u_{\mathrm{loc}}(X,p_0)$ respectivement. Partons de $H(\varphi^0(t,(x^s,x^u)))$, que nous allons récrire successivement en tenant compte des propriétés précédentes.

Nous avons :

$$H(\varphi^0(t,(x^s,x^u))) = H(\varphi^0_s(t,x^s),\varphi^0_u(t,x^u)).$$

Par définition de H, on a :

$$H(\varphi^0_s(t,x^s),\varphi^0_u(t,x^u)) = L_s(h^u\circ\varphi^0_u(t,x^u)) \cap L_u(h^s\circ\varphi^0_s(t,x^s)).$$

La conjugaison sur les variétés stables et instables se traduit par :

$$h^s\circ\varphi^0_s(t,x^s) = \varphi_s(t,h^s(x^s)) \quad \text{et} \quad h^u\circ\varphi^0_u(t,x^u) = \varphi_u(t,h^u(x^u)).$$

Ceci permet d'écrire :

$$L_s(h^u \circ \varphi_u^0(t, x^u)) \cap L_u(h^s \circ \varphi_s^0(t, x^s)) = L_s(\varphi_u(t, h^u(x^u))) \cap L_u(\varphi_s(t, h^s(x^s))).$$

Comme les feuilletages sont invariants par le flot $\varphi(t, (x^s, x^u))$ (voir l'énoncé du théorème 3.7), on a :

$$L_s(\varphi_u(t, h^u(x^u))) \cap L_u(\varphi_s(t, h^s(x^s))) = \varphi(t, L_s(h^u(x^u))) \cap \varphi(t, L_u(h^s(x^s))).$$

Comme chaque feuille stable coupe en un point et un seul chaque feuille instable, on a :

$$\varphi(t, L_s(h^u(x^u)) \cap \varphi(t, L_u(h^s(x^s)) = \varphi(t, L_s(h^u(x^u)) \cap L_u(h^s(x^s))).$$

Mais par définition de H, on a :

$$L_s(h^u(x^u)) \cap L_u(h^s(x^s)) = H(x^s, x^u),$$

et donc :

$$\varphi(t, L_s(h^u(x^u)) \cap L_u(h^s(x^s))) = \varphi(t, H(x^s, x^u)),$$

ce qui donne la formule de conjugaison (3.39). ■

Remarque 3.14. Les propositions 3.3 et 3.4 ont donné des modèles pour les champs linéaires hyperboliques et les difféomorphismes linéaires hyperboliques, à conjugaison topologique près. Le théorème 3.9 implique que ces modèles linéaires sont aussi des modèles locaux, au voisinage des points singuliers hyperboliques de champs, et de points fixes hyperboliques de difféomorphismes, à conjugaison topologique près. En conséquence, le type topologique, au voisinage d'un zéro hyperbolique de champ, ne dépend que de la dimension de l'espace propre stable (ou de celle de l'espace propre instable), alors que le type topologique, au voisinage d'un point fixe hyperbolique de difféomorphisme, dépend aussi de la propriété pour le difféomorphisme de préserver ou de renverser l'orientation, en restriction à ses variétés invariantes locales, stable et instable (cette propriété peut évidemment se vérifier sur la partie linéaire).

3.7. Variétés invariantes globales

Soit f un difféomorphisme d'une variété M et p_0 un point fixe. On est intéressé par les points dont les orbites tendent vers p_0 dans le futur ou bien le passé :

Définition 3.10. On définit deux ensembles invariants (globaux) associés au point fixe p_0 :

1. L'ensemble invariant stable :

$$W^s(f,p_0) = \{x \in M \mid f^p(x) \to p_0, \text{ pour } p \to +\infty\}.$$

2. L'ensemble invariant instable :

$$W^u(f,p_0) = \{x \in M \mid f^{-p}(x) \to p_0, \text{ pour } p \to +\infty\}.$$

Ces ensembles peuvent être compliqués en général. Par contre, dans le cas d'un point fixe hyperbolique, l'existence de variétés invariantes locales qui sont des disques plongés permet de montrer que :

Proposition 3.7. *Soit p_0 un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f sur une variété M. Soit d_s et d_u les dimensions des espaces propres stable et instable en p_0. Alors $W^s(f,p_0)$ est l'image d'une immersion injective $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{d_s}$, et $W^u(f,p_0)$ est l'image d'une immersion injective $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{d_u}$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver le résultat relatif à $W^s(f,p_0)$. Le théorème 3.1 nous fournit un voisinage U de p_0 dans M, pour lequel l'ensemble invariant stable local $W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)$ est un disque plongé de dimension d_s, et tel que

$$f(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)) \subset \text{Int}\left(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)\right). \tag{3.40}$$

Par définition, il est clair que $W^{U,s}_{\text{loc}} \subset W^s(f,p_0)$. En effet, l'inclusion (3.40) implique que l'orbite positive de chaque point de $W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)$ est contenue dans cette sous-variété et, en conséquence, la convergence dans U implique la convergence dans M. D'autre part, l'ensemble $W^s(f,p_0)$ est trivialement invariant par f et f^{-1}. Donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}\left(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)\right)$ est contenu dans $W^s(f,p_0)$. Inversement, si $m \in W^s(f,p_0)$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $f^n(m) \in U$. Le point (1) du théorème 3.1 implique que $f^{n_0}(m) \in W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)$. Il s'ensuit que $m \in \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}\left(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)\right)$, et donc que cet ensemble contient $W^s(f,p_0)$. Finalement on a prouvé l'égalité :

$$W^s(f,p_0) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}\left(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)\right).$$

Chaque ensemble $D_n = f^{-n}\left(W^{U,s}_{\text{loc}}(f,p_0)\right)$ est une sous-variété difféomorphe au disque D^s. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_n \subset \text{Int}(D_{n+1})$ et

$D_{n+1} \setminus \mathrm{Int}(D_n)$ est difféomorphe à l'anneau (aussi appelé couronne) $\partial D^n \times [0,1]$ (par construction $C = W^s(f,p_0) \setminus \mathrm{Int}\big(f(W^s(f,p_0))\big)$ est difféomorphe à la couronne, et $D_n \setminus \mathrm{Int}(D_{n+1}) = f^{-n-1}(C)$). Or, il est facile de montrer qu'une variété $\mathcal{W}$ de dimension d_s, qui est égale à $\cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, avec T_n difféomorphe au disque D^s et $T_n \subset \mathrm{Int}(T_{n+1})$ avec $T_{n+1} \setminus \mathrm{Int}(T_n)$ difféomorphe à la couronne $\partial D^n \times [0,1]$, est difféomorphe à $\mathbb{R}^{d_s}$. Pour cela, on écrit $\mathbb{R}^{d_s}$ comme l'union $\cup_{n\in\mathbb{N}} D^n$, où D^n est la boule à l'origine de rayon $n+1$, et on construit un difféomorphisme $H : R^{d_s} \mapsto \mathcal{W}$ par une induction sur n : on suppose H déjà défini sur D^n par un difféomorphisme H_n de D^n sur T_n, et on prolonge H_n par un difféomorphisme H_{n+1} de D^{n+1} sur T_{n+1}. Cela se fait par un argument de partition de l'unité, en utilisant le fait que $D^{n+1} \setminus \mathrm{Int}(D^n)$ et $T_{n+1} \setminus \mathrm{Int}(T_n)$ sont difféomorphes à $\partial D^n \times [0,1]$. Il en résulte que $W^s(f,p_0)$ est l'image d'une immersion injective de $\mathbb{R}^{d_s}$ (voir [37] par exemple pour la définition et l'usage des partitions de l'unité). ■

***Remarque* 3.15.** Les variétés invariantes $W^s(f,p_0)$ et $W^u(f,p_0)$ ne sont pas en général des sous-variétés de M (malgré leur nom !) et, par exemple, il peut arriver que la topologie de leur fermeture soit compliquée. On verra, par exemple, dans le chapitre 4, que si $W^s(f,p_0)$ coupe transversalement $W^u(f,p_0)$ en un point q (appelé *point homocline* : un point homocline q de p_0 est un point $q \in W^s(f,p_0) \cap W^u(f,p_0) \setminus \{p_0\}$), alors ces deux variétés invariantes se replient sur elles-mêmes, et leurs fermetures ont transversalement la structure d'un ensemble de Cantor. Plus généralement, l'importance des variétés invariantes tient au fait que les propriétés complexes de la dynamique sont intimement liées à la façon dont ces variétés invariantes sont immergées dans M.

Il est très facile de généraliser le λ-Lemma aux variétés invariantes globales :

***Théorème* 3.10 (Version globale du λ-Lemma pour les difféomorphismes).** *Soit f un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété M, avec un point hyperbolique p_0 de type selle. Soit N une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, difféomorphe au disque de dimension d_u, plongée dans M, coupant $W^s(f,p_0)$ transversalement en un unique point q, intérieur à N. Soit T une sous-variété difféomorphe au disque de $\mathbb{R}^{d_u}$, plongée dans $W^u(f,p_0)$, et contenant p_0 dans son intérieur.*

Alors, il existe une suite de sous-variétés $P_n \subset N$, pour $n \geq n_0$, un certain entier, avec les propriétés suivantes. Chaque P_n est difféomorphe au disque de dimension d_u ; les P_n sont emboîtés : $\ldots \subset P_{n+1} \subset P_n \subset \ldots \subset N_{n_0} \subset N$; le diamètre de P_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$. La suite des itérés $f^n(P_n)$ converge vers T dans la topologie $\mathcal{C}^\infty$. Cela signifie que l'on peut paramétrer les $f^n(P_n)$, et T, par des plongements $g_n, g : D^u \mapsto M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tels que $(g_n)_n \to g$ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(D^u, M)$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de D^u dans M.

On a un résultat analogue pour la variété stable $W^s(f, p_0)$, et une sous-variété N coupant transversalement $W^s(f, p_0)$ en un point, en remplaçant f par f^{-1}.

La figure 3.18 illustre ce théorème.

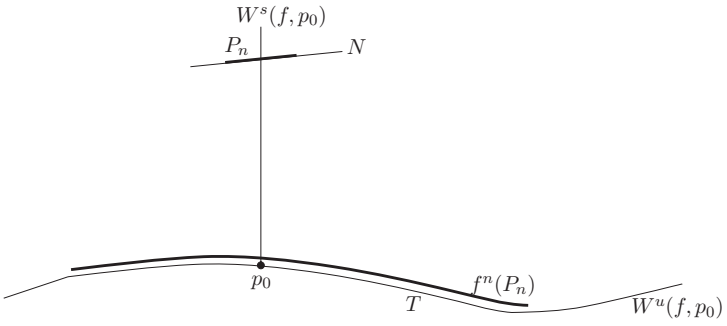


Figure 3.18

On peut aussi donner des versions globales de l'existence de feuilletages, stable et instable, avec une feuille arbitraire (difféomorphe à un disque contenant p_0) dans $W^s(f, p_0)$ ou $W^u(f, p_0)$ respectivement. Ces théorèmes (λ-Lemma, existence de feuilletages invariants) ont un grand intérêt pour comprendre le comportement des trajectoires passant au voisinage du point p_0. En dimension 2, la position relative d'un point q par rapport à $W^s(p_0)$ permet de préciser le comportement de la trajectoire de q dans le futur : partant de q_1 (resp. q_2), on tourne à droite (resp. gauche) du point de selle p_0 (figure 3.19).

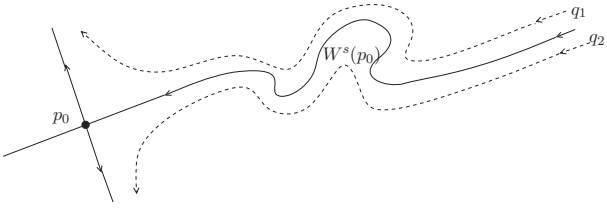


Figure 3.19

On en verra un exemple lors de la construction d'une dynamique de type « fer-à-cheval » au voisinage d'un point homocline (figure 3.20). Cette notion sera étudiée au chapitre 4.

Si p_0 est un point singulier d'un champ de vecteurs sur M, on définit des ensembles invariants stable et instable $W^s(X, p_0)$ et $W^u(X, p_0)$ en remplaçant, dans la définition 3.10, les itérés $f^{\pm n}(x)$ par le flot $\varphi(t, x)$, et la convergence : $n \to \pm\infty$ par la convergence : $t \to \pm\infty$. On a alors des versions globales du λ-Lemma et de l'existence de feuilletages invariants, stable et instable.

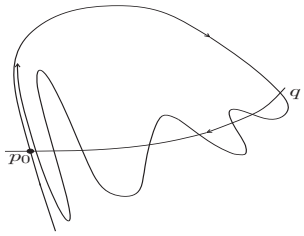


Figure 3.20. Exemple d'un point q homocline du point p_0.

Enfin, on peut considérer aussi les points périodiques p_0 de difféomorphismes et les orbites périodiques γ des champs de vecteurs. On définit les ensembles invariants en remplaçant le point p_0, par l'orbite périodique $O_f(p_0)$ de p_0, ou bien par l'orbite γ. Pour obtenir une version du λ-Lemma global ou de l'existence des feuilletages invariants dans ce contexte, il suffit de considérer p_0 comme un point fixe du difféomorphisme f^p, et l'application de Poincaré h de l'orbite périodique γ. À titre d'exemple, compte tenu de la remarque 3.9, on obtient que les ensembles invariants $W^{s,u}(X,\gamma)$ d'une orbite périodique d'un champ X sont des immersions injectives, du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^{d_s,d_u}$ ou bien du ruban de Möbius de fibre $\mathbb{R}^{d_s,d_u}$.

This page intentionally left blank

4

SYSTÈMES DYNAMIQUES STRUCTURELLEMENT STABLES

4.1. Introduction

Soit M une variété que nous supposerons compacte et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On désigne par $\chi^k(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ définis sur M, par $\mathcal{C}^k(M,M)$ l'espace des applications de classe $\mathcal{C}^k$, et par $\mathrm{Diff}^k(M) \subset \mathcal{C}^k(M,M)$ l'espace des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ de M dans M, avec $0 \leq k \leq +\infty$. Ces espaces sont munis de la $\mathcal{C}^k$-topologie de la convergence uniforme définie dans le chapitre 2. On rappelle que $\chi^k(M)$ est un espace de Fréchet (de Banach si $k < +\infty$), que $\mathcal{C}^k(M,M)$ est un fermé de l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^k(M,\mathbb{R}^N)$ pour N assez grand (on peut plonger M dans $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand), et que $\mathrm{Diff}^k(M)$ est un ouvert de $\mathcal{C}^k(M,M)$.

On supposera, dans ce chapitre, que $k = 1, \ldots, +\infty$. Certains résultats ne seront valables que pour une valeur de k assez grande, valeur que l'on précisera dans chaque cas.

Désignons par $\mathcal{E}^k$ l'un quelconque de ces espaces topologiques. On a montré dans le chapitre 2 que $\mathcal{E}^k$ a la propriété de Baire suivante :

Soit $\{\mathcal{U}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, une collection dénombrable d'ouverts denses de $\mathcal{E}^k$. Alors $\mathcal{R} = \cap_n \mathcal{U}_n$ est une partie dense de $\mathcal{E}^k$.

On appelle *sous-ensemble résiduel* de $\mathcal{E}^k$ une telle intersection dénombrable $\mathcal{R}$ d'ouverts denses et on rappelle que, suivant Thom, on dit qu'une propriété définie pour les éléments $\mathcal{E}^k$ est *générique,* si elle est vérifiée sur un ensemble résiduel de $\mathcal{E}^k$.

Dans le chapitre 1 d'introduction, nous avons introduit une relation d'équivalence sur l'espace $\mathcal{E}^k$: la relation de conjugaison (topologique) entre applications, difféomorphismes et celle d'équivalence (topologique) entre champs de vecteurs respectivement. Nous avons, d'autre part, introduit dans ce chapitre la notion de *stabilité structurelle* en classe $\mathcal{C}^k$ pour cette relation d'équivalence. Définissons-la dans l'espace $\mathcal{E}^k$:

Définition 4.1. Un élément $\xi \in \mathcal{E}^k$ est dit *structurellement stable en classe* $\mathcal{C}^k$ s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de ξ dans $\mathcal{E}^k$ tel que, si $\eta \in \mathcal{U}$, alors η est équivalent à ξ.

Remarque 4.1. Rappelons que l'équivalence entre les éléments $\xi, \eta \in \mathcal{E}^k$ est définie par l'existence d'un homéomorphisme h_η de M qui fait commuter les dynamiques de ξ et de η au sens précis défini dans le chapitre 1. Une version plus forte de la notion, que l'on qualifie de *stabilité structurelle homotopique,* est de demander l'existence d'une application continue $\eta \mapsto h_\eta$, du voisinage $\mathcal{U}$ introduit dans la définition 4.1 à valeurs dans $\mathrm{Hom}(M)$, avec $h_\xi = \mathrm{Id}_M$ ($\mathrm{Hom}(M)$ est l'espace des homéomorphismes de M, muni de la $\mathcal{C}^0$-topologie de la convergence uniforme). La plupart des résultats de stabilité structurelle sont en fait vrais en ce sens plus fort.

Considérons k, l tels que $0 < l < k \leq +\infty$. Si un élément de $\mathcal{E}^k$ est structurellement stable au sens de la $\mathcal{C}^l$-topologie, il est *a fortiori* structurellement stable au sens de $\mathcal{C}^k$-topologie : intuitivement une $\mathcal{C}^k$-perturbation est moins perturbante qu'une $\mathcal{C}^l$-perturbation.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1 pour y trouver quelques commentaires généraux sur la notion de stabilité structurelle, son intérêt pour la modélisation, et sa relation avec la notion de prédictibilité.

4.2. Stabilité structurelle locale

On peut introduire une version locale de la stabilité structurelle. Cette version locale va nous permettre de réinterpréter le théorème de Hartman-Grobman 3.9, pour les orbites périodiques hyperboliques des difféomorphismes, les points singuliers et les orbites périodiques hyperboliques des champs de vecteurs, comme un résultat de stabilité structurelle. La notion de stabilité structurelle locale est basée sur celle d'équivalence locale :

Définition 4.2. Soit $K, L \subset M$ des compacts.

(1) Supposons que K et L soient invariants respectivement par les difféomorphismes f et g de M (ou plus généralement des applications de M dans M). On dit que f au voisinage de K est équivalent (ou conjugué) à g au voisinage de L, s'il existe un voisinage U de K, et un homéomorphisme h de U sur son image dans M avec $h(K) = L$, tels que

$$\forall x \in U \cap f(U),\ g \circ h(x) = h \circ f(x).$$

(2) Supposons que K et L soient invariants par les flots des champs de vecteurs X et Y respectivement. On dit que X au voisinage de K est équivalent à Y au voisinage de L, s'il existe un voisinage U de K, et un homéomorphisme h de U sur son image dans M avec $h(K) = L$, tels que, pour tout $x \in U$, l'orbite de $X|_U$ par x soit envoyée sur l'orbite de $Y|_{h(U)}$ par $h(x)$.

Remarque 4.2 **(Rapport entre la conjugaison des difféomorphismes et l'équivalence des champs).** Nous avons montré dans la proposition 1.1 que, si X admet une section globale Σ d'application de retour f sur Σ (un difféomorphisme de Σ dans lui-même), et si Y admet la même section Σ avec g comme application de retour sur Σ, alors, si f et g sont topologiquement conjugués, les champs X et Y sont topologiquement équivalents. On a évidemment une version locale de cette correspondance. Supposons qu'un champ X admette une section Σ au voisinage d'un compact invariant K, avec une application de Poincaré f définie sur un voisinage $\tilde{\Sigma}$ de $\tilde{K} = K \cap \Sigma$ dans Σ. Le difféomorphisme f envoie $\tilde{K}$ dans lui-même. Une conjugaison locale de f, au voisinage $\tilde{K}$, entre f et un autre difféomorphisme local g, va se relever en une équivalence entre X et un champ Y défini par suspension de g.

Remarque 4.3. La notion d'équivalence locale induit une définition d'équivalence entre germes le long de K et L respectivement (voir le paragraphe 2.1 pour la définition de germe), car l'on peut choisir le voisinage U de façon arbitraire. On dira que le germe de f, respectivement de X, le long de K, est équivalent au germe de g, respectivement de Y, le long de L.

Pour les champs de vecteurs, on peut aussi définir la notion plus forte de conjugaison locale.

À cette notion d'équivalence locale va correspondre une notion de *stabilité structurelle locale.*

Définition 4.3. Soit K un compact de M.

(1) Supposons que K soit invariant par un difféomorphisme f de classe $\mathcal{C}^k$ (ou plus généralement une application de classe $\mathcal{C}^k$). On dit que f est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de K, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^k(M)$ avec la propriété suivante. Il existe une application *continue* $g \in \mathcal{U} \mapsto K_g \in \mathrm{Compact}(M)$ (espace des sous-ensembles compacts non vides de M, muni de la topologie de Hausdorff), avec $K_f = K$, telle que f, au voisinage de K, soit équivalent à g, au voisinage de K_g, compact invariant par g (sur un voisinage fixe U, indépendant de g).

(2) Supposons que K soit invariant par le flot d'un champ de vecteurs X. On dit que X est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de K, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de X dans $\chi^k(M)$ avec la propriété suivante. Il existe une application *continue* $Y \in \mathcal{U} \mapsto K_Y \in \mathrm{Compact}(M)$ (espace des sous-ensembles compacts non vides de M, muni de la topologie de Hausdorff), avec $K_Y = K$, telle que X, au voisinage de K, soit équivalent à Y, au voisinage de K_Y, compact invariant par le flot de Y (sur un voisinage fixe U, indépendant de Y).

Remarque 4.4.

1. Dans une version homotopique plus forte de la stabilité structurelle locale, on pourrait demander que l'équivalence entre f et g (ou bien X et Y) dépende continûment de la perturbation g (ou Y), c'est-à-dire que l'homéomorphisme d'équivalence, ainsi que son domaine de définition, soient choisis de façon continue par rapport à la perturbation. Pour les champs de vecteurs, on peut aussi définir une notion de stabilité structurelle locale plus forte en utilisant la relation de conjugaison.

2. La notion de stabilité structurelle locale sera surtout utilisée dans le cas où K est un point périodique (éventuellement fixe) d'application ou de difféomorphisme, ou bien un point singulier ou une orbite périodique de champ de vecteurs.

On peut maintenant interpréter le théorème de Hartman-Grobman comme un théorème de stabilité structurelle locale :

Théorème 4.1.

(1) Soit X un champ de vecteurs de M de classe $\mathcal{C}^1$ avec un point singulier hyperbolique p. Alors X est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de p.

(2) Soit X un champ de vecteurs de M de classe $\mathcal{C}^1$ avec une orbite périodique hyperbolique γ. Alors X est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de γ.

(3) Soit f un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de M avec une orbite périodique hyperbolique γ (en particulier γ peut se réduire à un point fixe). Alors f est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de γ.

Démonstration. Nous allons seulement nous contenter de traiter le cas (1) d'un point singulier hyperbolique de champ de vecteurs, les autres cas se traitant de façon complètement similaire. Supposons donc, que p soit un point singulier hyperbolique d'un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$, et que U soit un voisinage ouvert de p assez petit dans lequel p est l'unique point singulier de X. Comme la partie linéaire X_1 de X en p est représentée par une matrice inversible, une conséquence du théorème de l'inverse (voir partie I du tome 1) est qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de X dans $\mathrm{Diff}^1(M)$ et une application continue $\rho : Y \in \mathrm{Diff}^1(M) \mapsto \rho(Y) \in M$, avec $\rho(X) = p$, tels que $\rho(Y)$ soit l'unique point singulier de Y dans U, choisi assez petit. Si $\mathcal{U}$ est choisi assez petit pour que les valeurs propres de Y restent assez proches de celles de X, le point $\rho(Y)$ est hyperbolique avec mêmes dimensions d'espaces stable et instable qu'au point p pour X. Si Y_1 est la partie linéaire de Y, le théorème de Hartmann-Grobman dit, précisément, que X au voisinage de p est équivalent à X_1 au voisinage de 0, et aussi que Y au voisinage de $\rho(Y)$ est équivalent à Y_1 au voisinage de 0. La condition, supposée plus haut, sur les espaces propres, implique que les champs linéaires X_1 et Y_1 sont (globalement) équivalents. Il en résulte donc, par transitivité de l'équivalence, que X, au voisinage du point singulier p, est équivalent à Y, au voisinage du point singulier $\rho(Y)$. Il est facile de vérifier que l'on peut choisir l'équivalence définie sur un voisinage fixe U du point p. Le champ X est donc structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$, au voisinage du point hyperbolique p. ■

***Remarque* 4.5.** Dans le cas (1) d'un point singulier hyperbolique de champ de vecteurs, ou dans le cas (2) d'une orbite périodique hyperbolique de difféomorphisme, on peut démontrer la stabilité structurelle au sens plus fort de l'équivalence par conjugaison. Par contre, dans le cas (3), une orbite périodique hyperbolique γ d'un champ de vecteurs ne peut pas être structurellement stable localement au sens de la conjugaison, car il est clair que la valeur de la période peut changer par une perturbation $\mathcal{C}^1$ du champ. Si Σ est une section de γ coupant γ en un unique point p, la stabilité structurelle de X, au voisinage de l'orbite γ (au sens de l'équivalence entre champs), est équivalente à la stabilité structurelle de l'application de Poincaré f, au voisinage de son point fixe p (au sens de la conjugaison).

Remarquez que le résultat du théorème 4.1 reste *a fortiori* vrai si l'on remplace la classe $\mathcal{C}^1$ par la classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

4.3. Stabilité structurelle des champs en dimension 1

Il est très facile de caractériser les champs de vecteurs structurellement stables en dimension 1. Rappelons que les seules variétés compactes, connexes de dimension 1 (à base dénombrable d'ouverts) sont le cercle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et l'intervalle $I = [0,1]$. On peut traiter de façon complètement similaire les champs sur S^1 et les champs sur I. Aussi, nous ne considérerons que les champs sur S^1.

Proposition 4.1. *Soit $k \in \mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\} = 1, \ldots, +\infty$. Un champ de vecteurs $X \in \chi^k(S^1)$ est structurellement stable si et seulement si X n'a que des points singuliers hyperboliques (éventuellement aucun point singulier).*

Démonstration. Considérons un champ $X \in \chi^k(S^1)$ dont tous les points singuliers sont hyperboliques (et donc en nombre fini). Un tel champ s'écrit $X = f(t)\frac{\partial}{\partial t}$ avec f fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^k$. Si X n'a aucun point singulier, il est équivalent au champ constant $\frac{\partial}{\partial t}$ et donc est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^0$. Supposons maintenant que X ait $l \geq 1$ points singuliers, tous hyperboliques : $t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_l \in [0,1]$ (avec i défini modulo $l+1$). Dire que les points sont hyperboliques signifie que $\frac{df}{dt}(t_i) \neq 0$, pour $i = 1, \ldots, l$. Le théorème de l'inverse implique que si $Y = g(t)\frac{\partial}{\partial t}$ est $\mathcal{C}^1$ assez proche de X (c'est-à-dire si la fonction périodique g est $\mathcal{C}^1$ assez proche de la fonction périodique f), alors Y a aussi l points singuliers hyperboliques $t_1(Y) < \ldots < t_l(Y) \in [0,1]$ modulo 1, proches de $t_1 < \ldots < t_l$. Il est trivial de construire un homéomorphisme h_Y de S^1 envoyant t_i sur $t_i(Y)$, pour $i = 1, \ldots, l$ (par exemple on peut choisir h_Y d'être affine sur chacun des intervalles limités par deux points consécutifs : t_i, t_{i+1}). Si le $\mathcal{C}^1$-voisinage de X est choisi de façon que $\frac{df}{dt}(t_i(Y))$ ait le même signe que $\frac{df}{dt}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$, alors l'homéomorphisme h_Y envoie les orbites régulières de X (dans le complémentaire de l'ensemble des points singuliers) sur les orbites régulières de Y, *en préservant leur orientation.* L'homéomorphisme h_Y est donc une équivalence de X avec Y.

Inversement, supposons que le champ X soit structurellement stable en classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$, et soit $\mathcal{U}$ un voisinage de X pour la topologie $\mathcal{C}^k$, dans lequel tous les champs sont équivalents à X. La propriété d'avoir tous ses points singuliers hyperboliques est une propriété générique dans la topologie $\mathcal{C}^k$ au sens de Thom (voir le chapitre 2). Il s'ensuit que $\mathcal{U}$ contient un champ Y n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers, tous hyperboliques. Le champ X étant équivalent à Y a donc également un même nombre fini de points singuliers $p_1, \ldots, p_l$. Remarquons que cet argument n'implique pas que les points singuliers de X soient hyperboliques (en effet la notion d'hyperbolicité n'est pas préservée par équivalence). Nous allons néanmoins montrer que ces points singuliers sont en fait tous hyperboliques.

Supposons donc que p soit un point singulier de X non hyperbolique et t une coordonnée locale au voisinage de p avec $p = \{t = 0\}$. Dans un voisinage $I = [-\eta, \eta]$ de 0, le champ X s'écrit $tg(t)\frac{\partial}{\partial t}$, où g est une fonction continue. Puisque le point 0 n'est pas hyperbolique, il vient $g(0) = 0$. D'autre part, comme 0 est un point singulier isolé, on peut supposer que la fonction g ne s'annule qu'en 0 sur $[-\eta, \eta]$. Considérons une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive $\rho(t)$, égale à 1 sur l'intervalle $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$ et à 0 dans le complémentaire de l'intervalle $[-\eta, \eta]$. On considère la famille à un paramètre de champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$:

$$X_\lambda(t) = X(t) + \lambda\rho(t)t\frac{\partial}{\partial t} = t\big(g(t) + \lambda\rho(t)\big)\frac{\partial}{\partial t}.$$

On a évidemment $X_0 = X$ et comme $\lambda \mapsto X_\lambda$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\chi^k(S^1)$, il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que $X_\lambda \in \mathcal{U}$ pour $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$. Les points singuliers de X_λ dans l'intervalle $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$ sont donnés par l'équation $tg(t) - \lambda t = 0$, ce qui est équivalent à $t = 0$ et $g(t) = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$ est assez petit, l'équation $g(t) = \lambda$ a une solution $t_\lambda \neq 0$ dans l'intervalle $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$. En conséquence, le champ X_λ, pour $\lambda \neq 0$ et assez petit, a au moins deux points singuliers distincts $0 \neq t_\lambda$ dans cet intervalle. Comme les champs X et X_λ coïncident sur $S^1 \setminus I$, les $l - 1$ points singuliers de X situés hors de l'intervalle I sont aussi points singuliers du champ X_λ pour tout λ. Il en résulte que le champ X_λ pour $\lambda \neq 0$ assez petit, est contenu dans $\mathcal{U}$ et a au moins $l+1$ points singuliers, ce qui contredit le fait que X est structurellement stable en classe $\mathcal{C}^k$ (rappelons que le champ X a exactement l points singuliers). ■

Définition 4.4. Nous dirons d'un champ de S^1, dont tous les points singuliers sont hyperboliques, qu'il est un *champ de Morse-Smale* ou simplement un *champ à points singuliers hyperboliques.*

Nous désignerons par $\mathcal{U}_H^k \subset \chi^k(S^1)$ l'ensemble des champs de classe $\mathcal{C}^k$, à points singuliers hyperboliques.

Nous avons déjà remarqué (item 2 du paragraphe 2.6) que la propriété pour un champ de $\chi^k(S^1)$ d'être à points singuliers hyperboliques est générique au sens de Thom, pour tout $k = 1, \ldots, +\infty$. Pour le vérifier, il suffit d'appliquer le théorème de transversalité 2.5. En effet, si $X = f(t)\frac{\partial}{\partial t}$, où f est une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^k$, le champ X est à points singuliers hyperboliques si et seulement si le graphe de f est transverse dans $S^1 \times \mathbb{R}$ à la section nulle $S^1 \times \{0\}$. Il suit alors, du théorème de transversalité, que l'ensemble $\mathcal{U}_H^k$ est résiduel et donc dense (ce qui signifie que la propriété d'être à points singuliers hyperboliques est générique). D'autre part, $\mathcal{U}_H^k$ est un ouvert de $\chi^k(S^1)$ par définition. Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 4.2. *Soit $k \in \mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\} = 1, \ldots, +\infty$. L'ensemble $\mathcal{U}_H^k$ des champs de classe $\mathcal{C}^k$ à points singuliers hyperboliques est un ouvert dense de $\chi^k(S^1)$. La propriété d'être structurellement stable est donc générique dans $\chi^k(S^1)$.*

Remarque 4.6. Comme tout champ de classe $\mathcal{C}^k$ peut être approché (en classe $\mathcal{C}^k$) par un champ $\mathcal{C}^\infty$, l'ensemble des champs $\mathcal{C}^\infty$, à points singuliers hyperboliques est dense dans $\chi^k(S^1)$. Par contre, cet ensemble n'est pas ouvert (ni même résiduel). Dans les énoncés des propositions 4.1 et 4.2, on peut remplacer, avec un peu de travail, l'équivalence entre champs par la relation plus forte de conjugaison entre champs, *à la condition de se restreindre aux champs ayant au moins un point singulier* (la période d'un champ sans point singulier peut varier par perturbation arbitrairement petite, même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

4.4. Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre 0

Nous avons défini le genre d'une surface par la définition II-4.13. Nous allons nous limiter aux surfaces compactes et orientables. Une telle surface de genre 0, qui peut avoir un bord non vide, a un intérieur qui est homéomorphe à un ouvert de la sphère S^2. Chaque composante connexe d'une telle surface est difféomorphe soit à la sphère S^2, soit à un disque troué, éventuellement à un disque sans trou. La seule surface compacte, connexe et sans bord de genre 0 est donc la sphère S^2.

Ce qui fait la particularité de telles surfaces est que les champs de vecteurs (supposés transverses au bord) n'ont pas d'ensembles récurrents non triviaux : c'est le théorème de Poincaré-Bendixson II-5.2.

Les premiers résultats de stabilité structurelle ont été obtenus par Pontryagin et Andronov pour les champs sur le disque D^2. Ce sont aussi ces auteurs qui ont introduit le concept de stabilité structurelle.

Précisément, ces auteurs ont introduit le concept de *champs grossiers* (maintenant appelés champs de *Morse-Smale*) de D^2. Il est très facile de généraliser leur définition ainsi que leurs résultats aux surfaces compactes orientables de *genre* 0. Pour une telle surface, on définit :

Définition 4.5. Soit M^2 une surface compacte, orientable, de genre 0. L'ensemble de Morse-Smale $\mathcal{MS}^k \subset \chi^k(M^2)$ est l'ensemble des champs de classe $\mathcal{C}^k$ ayant les propriétés suivantes :

1. X n'a qu'un *nombre fini* de points singuliers et d'orbites périodiques, tous supposés hyperboliques et contenus dans l'intérieur de M^2.

2. $X \pitchfork \partial M^2$ (c'est-à-dire le champ X) est transverse au bord de M^2.
3. X n'a pas de connection de points de selle.

Une *connection (de points) de selle* est une séparatrice commune à deux points de selle (figure 4.1).

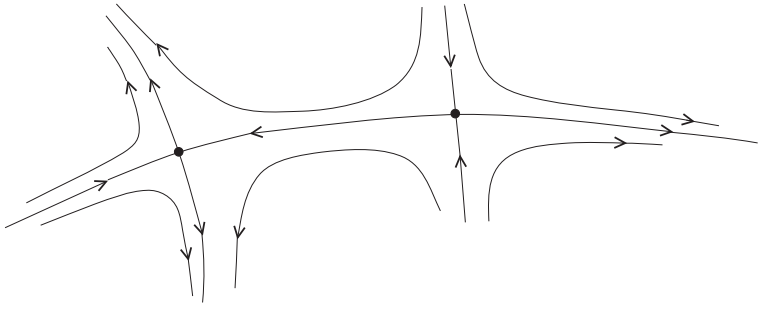


Figure 4.1

Évidemment la deuxième condition est vide si $\partial M^2 = \emptyset$, c'est-à-dire si chaque composante connexe de M^2 est une sphère. La figure 4.2-(b) représente le champ de Morse-Smale le plus simple sur le disque D^2 avec seulement un point singulier : un puits P. La figure 4.2-(c) représente un champ de Morse-Smale sur S^2 avec deux sources S_1 et S_2, un point de selle σ et un puits P. Ce champ est le gradient de la fonction hauteur sur la sphère plongée, pour la métrique induite. La fonction hauteur est la coordonnée z si les trois coordonnées de $\mathbb{R}^3$ sont x, y, et z (figure 4.2-(a)).

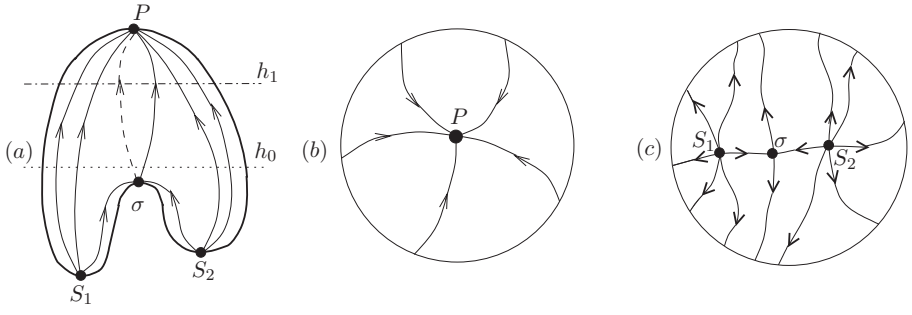


Figure 4.2. Exemples de champs de Morse-Smale sur D^2. La figure (b) (resp. (c)) représente le gradient de la fonction hauteur au-dessus de la hauteur h_1 (resp. au-dessous de la hauteur h_0).

Andronov et Pontryagin ont montré que les champs transverses au bord, structurellement stables sur le disque D^2, sont précisement les champs de Morse-Smale. Voici la généralisation de ce résultat aux surfaces de genre 0 :

Théorème 4.2. *Soit M^2 une surface compacte, orientable de genre 0 et $k = 1, \ldots, +\infty$. Désignons par $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2) \subset \chi^k(M^2)$ l'espace des champs de vecteurs transverses au bord de M^2 (on a $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2) = \chi^k(M^2)$ si $\partial M^2 = \emptyset$).*

1. *L'ensemble $\mathcal{MS}^k(M^2) \subset \chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$ est un ouvert dense dans $\chi^k(M^2)$ pour la $\mathcal{C}^k$-topologie.*
2. *$X \in \chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$ est structurellement stable si et seulement si $X \in \mathcal{MS}^k(M^2)$.*

Idée de la preuve. On peut trouver une preuve détaillée dans [52]. Nous nous contenterons ici d'en donner les idées principales. Il suffit de considérer le cas où M^2 est connexe, ce que nous supposerons dorénavant.

(a) Le point (1). Il suit du théorème de transversalité 2.5 que la propriété de n'avoir que des points singuliers hyperboliques est générique dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$ (remarquez que cet espace est un espace de Baire). En considérant les applications de retour à un ensemble fini de sections locales, on peut aussi montrer que la propriété de n'avoir que des orbites périodiques hyperboliques est aussi générique. Pour conclure, il suffit de montrer que, si un champ dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$ n'a que des points singuliers et des orbites périodiques hyperboliques, on peut diminuer strictement le nombre des connections de selle (qui sont nécessairement en nombre fini) par une $\mathcal{C}^k$-perturbation arbitrairement petite. Choisissons une de ces connections γ. On suppose que les ensembles limites de γ sont $\alpha(\gamma) = s_1$ et $\omega(\gamma) = s_2$, où s_1 et s_2 sont des points de selle, éventuellement confondus. Choisissons un voisinage tubulaire $T = \{(t, y) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\delta, \delta]\}$, dans lequel t est le temps et $\Sigma = \{0\} \times [-\delta, \delta]$ une section paramétrée par y. Autrement dit, dans T, le flot à partir de Σ est donné par $\varphi(t, (0, y)) = (t, y)$ et le champ X est égal à $\frac{\partial}{\partial t}$. On suppose de plus que $\Sigma \cap \gamma = \{0\} \times \{0\}$ et que ce point est l'unique éventuel point d'accumulation de points à l'intersection de Σ avec des séparatrices de points de selle (par exemple γ pourrait appartenir à un polycycle sur lequel s'accumulerait une séparatrice d'un point de selle). Soit $K \subset \Sigma$ l'ensemble de ces points. On peut alors choisir Σ et sa paramétrisation par y de façon à ce que $K \cap \Sigma \subset \{0\} \times [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Soit $\Psi(t, y)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, positive, à support dans T et telle que $\Psi(0, 0) > 0$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on considère le champ de classe $\mathcal{C}^k$, $X_\lambda = X + \lambda\Psi\frac{\partial}{\partial y}$ dans T et égal à X en dehors de T. On peut choisir

la fonction Ψ, indépendante de y au voisinage de $\{y = 0\}$, de façon que l'application de transition pour le flot de X_λ entre les sections $\Sigma_- = \{-\varepsilon\} \times [-\delta, \delta]$ et $\Sigma_+ = \{\varepsilon\} \times [-\delta, \delta]$ soit une translation $y \mapsto y + c\lambda$ pour une constante $c > 0$, si $y \in [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Alors le champ X_λ aura une connection de selle coupant T si et seulement si $c\lambda \in K - K = \{y_1 - y_2 \mid y_1, y_2 \in K\}$. Comme K est dénombrable, l'ensemble de ces valeurs de λ est de mesure nulle. En conséquence, pour presque toutes les valeurs de λ, et en particulier pour des valeurs de λ arbitrairement petites, le champ X_λ n'a pas de connections de selle passant par T. Ce champ X_λ aura au moins une connection de selle de moins que X puisqu'on a cassé la connection de γ sans en créer de nouvelles (comme la perturbation a son support dans T, toute nouvelle connection doit couper T). Il suit de ces considérations que l'ensemble $\mathcal{MS}^k(M^2)$ est dense dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$.

Il est assez clair que $\mathcal{MS}^k(M^2)$ est ouvert dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$. En effet les éléments critiques hyperboliques sont préservés par une petite perturbation de classe $\mathcal{C}^k$. D'autre part, toute séparatrice instable d'un point de selle d'un champ de Morse-Smale tend vers un point du bord ou un élément critique de type puits (et toute séparatrice stable vient d'un point du bord ou bien d'un élément critique de type source). Cette propriété locale est stable par petite perturbation de classe $\mathcal{C}^k$. Il s'ensuit que si $X \in \mathcal{MS}^k(M^2)$, tout un voisinage de X dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$ est aussi contenu dans $\mathcal{MS}^k(M^2)$, qui est donc un ensemble ouvert (voir le point (b) pour plus de détails).

(b) Les champs de Morse-Smale sont structurellement stables. Considérons un champ $X \in \mathcal{MS}^k(M^2)$. Par hypothèse, X n'a qu'un nombre fini d'éléments critiques (points singuliers ou bien orbites périodiques) : des sources $s_1, \ldots, s_m$, des puits $p_1, \ldots, p_n$ (sources et puits qui peuvent être des points ou des orbites périodiques) et des points de selle $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$. Le théorème de Poincaré-Bendixson II-5.2 implique que si $p \in M^2$ on peut décider du destin de la trajectoire $\varphi(t, p)$. Pour les t croissants, $\varphi(t, p)$ atteint un point du bord (en une composante de ∂M^2 où le champ est sortant) ou bien tend vers un puits ou un point de selle. Pour les t décroissants $\varphi(t, p)$ atteint un point du bord (en une composante de ∂M^2 où le champ est sortant) ou bien tend vers une source ou un point de selle. Pour cette raison, il est intéressant d'assimiler les composantes du bord où le champ est sortant à des puits et celles où le champ est rentrant à des sources, et de noter $S_1, \ldots, S_{\bar{m}}$ l'ensemble des sources et des composantes où le champ est rentrant et $P_1, \ldots, P_{\bar{n}}$ l'ensemble des puits et des composantes où le champ est sortant ($\bar{m} \geq m, \bar{n} \geq n$).

On peut associer au champ X un graphe orienté $\mathcal{G}(X)$ dont les points sont les éléments $S_1, \ldots, S_{\bar{m}}, P_1, \ldots, P_{\bar{n}}, \sigma_1, \ldots, \sigma_q$ et qui possède une arête de S_i à σ_j si une orbite de X « va de S_i à σ_j » et une arête de σ_j à P_l si une orbite de X

« va de σ_j à P_l ». On construit également une décomposition de M^2, canoniquement associée à X de la façon suivante. On choisit un disque ou un anneau $D_X(P_i)$ (resp. $D_X(S_j)$) voisinage de P_i (resp. S_j) dans lequel P_i (resp. S_j) est l'unique éventuel élément critique et à bord transverse à X (qui est sortant pour S_j et rentrant pour P_i). On choisit un voisinage cruciforme $D_X(\sigma_k)$ pour chaque point de selle σ_k (figure 4.3 ; un tel voisinage a un bord union de quatre segments d'orbites et de quatre sections tranverses, chacune transverse à une des séparatrices).

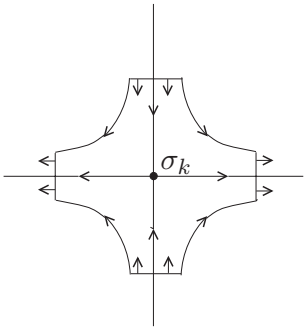


Figure 4.3

En fait, chacun des disques D_X est un domaine local de stabilité structurelle du théorème de Hartman-Grobman. On choisit les disques de façon à ce que leurs intérieurs ainsi que les voisinages cruciformes soient deux à deux disjoints. En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson, on voit que l'union de ces disques recouvre M moins un nombre fini de *grands voisinages tubulaires* (voir paragraphe II-5.3.3, figure II-5.19). La figure 4.4 montre un exemple d'une telle décomposition sur le disque D^2.

Maintenant, si Y est un champ assez $\mathcal{C}^k$-proche de X, pour $k = 1, \ldots, +\infty$, les éléments critiques de Y sont proches, hyperboliques et en correspondance bi-univoque avec ceux de X, comme conséquence de l'hypothèse (1) de la définition 4.5. Si la perturbation est assez petite, le champ Y n'a pas de connection de selle : en effet, la distance entre deux séparatices différentes varie continûment quand Y varie dans la $\mathcal{C}^1$-topologie et cette distance est non nulle pour X par l'hypothèse (3). La condition (2) est trivialement préservée par $\mathcal{C}^0$-perturbation. Le champ Y est donc de Morse-Smale, avec un graphe associé isomorphe à celui de X. D'autre part, on peut associer à Y un ensemble de disques D_Y tel que leur union est égale à M et que le champ X sur l'un quelconque des disques D_X soit équivalent au champ Y sur le disque D_X correspondant. On construit alors une équivalence globale H entre les deux champs X et Y de la façon suivante. On choisit tout d'abord H comme une équivalence quelconque sur l'union des

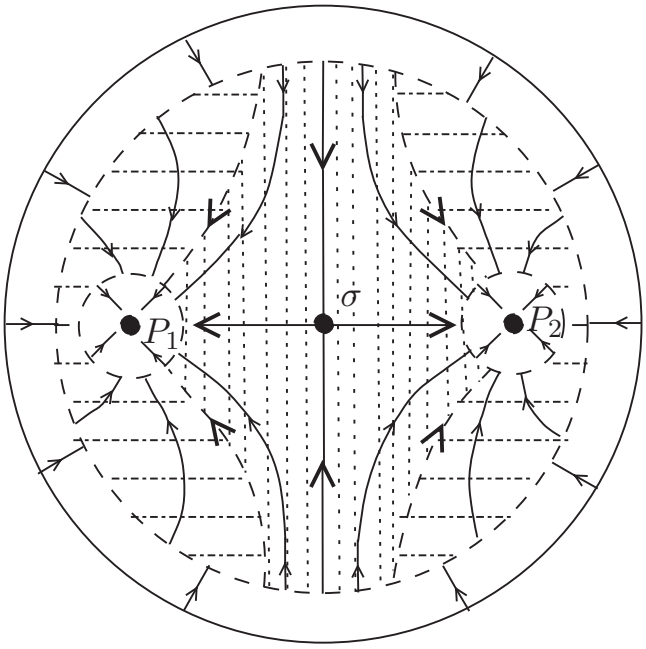


Figure 4.4. En pointillés verticaux, le voisinage cruciforme. En tirets-points horizontaux, les voisinages tubulaires.

voisinages cruciformes de X (à valeurs dans l'union des voisinages cruciformes de Y). Une telle équivalence H est alors définie sur une partie des bords des disques D_X associés aux puits et aux sources (partie égale à une union d'intervalles fermés). On étend H à l'union des bords de ces disques associés aux puits et aux sources (cela est possible car les graphes associés à X et Y sont isomorphes et les intervalles mentionnés ci-dessus apparaissent dans le même ordre sur des bords correspondants des disques D_X et D_Y). Pour chaque disque D_X de source ou de puits de X, on peut alors étendre H définie sur ∂D_X en une équivalence entre X sur D_X et Y sur le disque D_Y correspondant : on utilise ici la liberté de construction de l'équivalence entre deux sources (ou de puits), que l'on peut choisir arbitraires sur le bord d'un disque transverse aux trajectoires, situé dans le bassin d'attraction de X (respectivement de $-X$) de la source (respectivement du puits) considéré (théorème II-5.3).

(c) Les champs structurellement stables sont Morse-Smale. La démonstration est comparable à celle donnée plus haut pour les champs sur le cercle. Soit X un champ structurellement stable. Comme l'espace $\mathcal{MS}^k(M^2)$ est dense dans $\chi^k_{\pitchfork\partial M^2}(M^2)$, le champ X a le type topologique d'un champ de Morse-Smale. En

conséquence, le champ X n'a qu'un nombre fini d'éléments critiques. Chacun d'eux est hyperbolique. En effet, si un élément critique γ est non hyperbolique, on peut trouver un champ Y, arbitrairement $\mathcal{C}^k$-proche de X, pour lequel γ est remplacé par plusieurs éléments critiques, sans que les autres éléments critiques soient modifiés. Le champ Y a alors strictement plus d'éléments critiques que X, ce qui est en contradiction avec la stabililité structurelle de X. Le champ X vérifie donc la condition (1) de la définition 4.5. La condition (2) de la définition 4.5 est aussi vérifiée car $X \in \chi^k_{\pitchfork \partial M^2}(M^2)$. Enfin, la condition (3) de la définition 4.5 est aussi vérifiée. En effet, si X a des connections de selle, on a montré dans le point (a) que l'on peut trouver Y, arbitrairement $\mathcal{C}^k$-proche de X, avec strictement moins de connection de points de selle, ce qui serait en contradiction avec la stabilité structurelle de X. ■

Dans la preuve du théorème 4.2, on a utilisé, de façon cruciale, la liberté laissée pour la construction d'équivalence au voisinage des éléments critiques de type source ou bien puits. Par exemple, la proposition 3.1 montre que, si deux champs de vecteurs X, Y sont donnés sur le même disque D centré en $0 \in \mathbb{R}^n$, sont transverses à ∂D, et tels que toutes les trajectoires de X et Y dans D convergent vers la singularité 0 pour $t \to +\infty$, alors les champs X et Y sont conjugués par un homéomorphisme H de D que l'on peut choisir de façon arbitraire sur ∂D. On a une liberté analogue pour les difféomorphismes, et donc pour les orbites périodiques de champs de vecteurs de type source ou puits. Voici la version de ce résultat que l'on a implicitement utilisée dans la preuve ci-dessus et dont nous ne donnerons pas les détails de démonstration :

Proposition 4.3. *Soit X, Y deux champs de vecteurs définis sur l'anneau $A = S^1 \times [0,1]$ avec les propriétés suivantes :*

1. *X et Y n'ont pas de points singuliers.*

2. *X et Y sont transverses en rentrant le long de $S^1 \times \{1\}$, sont tangents et coïncident le long de $S^1 \times \{0\}$.*

3. *Toutes les trajectoires de X et Y issues des points de $S^1 \times \{1\}$ tendent vers $S^1 \times \{0\}$.*

Alors, il existe un homéomorphisme H de A sur A, égal à l'identité sur $S^1 \times \{0\}$, que l'on peut choisir arbitrairement sur $S^1 \times \{1\}$ (mais préservant l'orientation), et qui est une équivalence entre X et Y.

4.5. Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre ≥ 1

La difficulté supplémentaire que l'on rencontre dans le cas d'une surface générale est que le flot d'un champ de vecteurs peut avoir des récurrences non triviales, ce qui est impossible sur une surface de genre 0. Or une récurrence non triviale peut être source d'instabilité structurelle. Aussi, pour montrer que les systèmes structurellement stables sont génériques, on doit montrer que l'on peut faire disparaître les récurrences non triviales par petites perturbations. Nous allons revenir sur ce point clé dans les paragraphes 4.5.1 et 4.5.2 ci-dessous. Pour commencer, nous allons considérer le cas particulier des champs de vecteurs *sans singularités* sur le tore T^2, pour lesquels les récurrences sont les plus faciles à contrôler.

4.5.1. Champs de vecteurs du tore T^2 sans singularités

Une exposition assez complète des propriétés des champs de vecteurs sans singularités sur T^2 est faite par exemple dans [29]. Nous allons exposer sans démonstration quelques résultats sur les champs du tore sans singularités. Nous renvoyons le lecteur à [29] pour des développements. Rappelons que le tore est le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ et qu'un champ de vecteur sur T^2 s'identifie à un champ de $\mathbb{R}^2$ doublement périodique, c'est-à-dire à un champ de $\mathbb{R}^2$ invariant par translations entières de $\mathbb{Z}^2$ (voir paragraphe II-5.2) avec A, B doublement périodiques. Un tel champ s'écrit $A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ avec A, B des fonctions doublement périodiques : $A(x,y) = A(x+m, y+n)$ et $B(x,y) = B(x+m, y+n)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

Nous désignerons par $\chi^k_R(T^2)$ l'espace des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ sur T^2, sans singularités, autrement dit tels que $A(x,y)B(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $X \in \chi^k_R(T^2)$. Une première propriété, relativement facile à établir, est qu'il existe un cercle γ plongé dans T^2 qui est transverse (en chaque point) au champ X. Une telle courbe est non triviale au sens qu'elle ne peut pas border un disque plongé dans T^2 : en effet, sinon, ce disque devrait contenir un point singulier de X comme on l'a montré dans le paragraphe II-4.4. Il est alors connu qu'une telle courbe est difféomorphe (par un difféomorphisme du tore) à la courbe $\{(0,y) \mid y \in S^1\}$. Il en résulte que la surface obtenue en coupant le tore le long de γ est difféomorphe à l'anneau $A = S^1 \times [0,1]$ et que le champ X relevé sur A est entrant le long d'une composante du bord de A et sortant le long de l'autre composante. On peut alors se demander si une telle courbe est une section globale au sens du paragraphe II-6.2. En fait ce n'est pas toujours le cas à cause de la présence éventuelle d'une *composante de Reeb* pour le champ X :

Définition 4.6. Une composante de Reeb pour un champ de vecteurs X sur une surface M^2 est une sous-variété R difféomorphe à l'anneau $S^1 \times [0,1]$, avec les propriétés suivantes (figure 4.5) :

1. Les deux composantes du bord de R sont des orbites de X qui ont des orientations opposées.

2. Les orbites dans l'intérieur de R sont toutes apériodiques avec pour ensemble α-limite l'une des composantes et pour ensemble ω-limite l'autre composante.

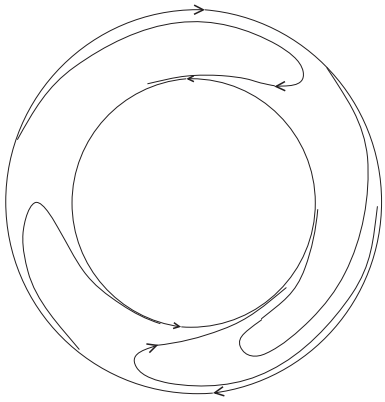


Figure 4.5

Soit R une telle composante. Si σ est un segment joignant une composante du bord de R à l'autre composante, le champ X a nécessairement un point de tangence avec ce segment (en effet, même si l'on considère un segment transverse à X, en ces deux extrémités on aura nécessairement un point de tangence dans l'intérieur de σ, car le champ X pointe dans des directions opposées aux deux extrémités (figure 4.6)).

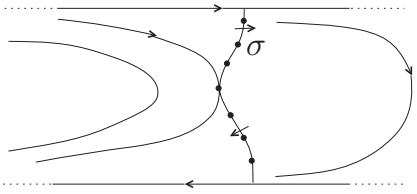


Figure 4.6

Revenons maintenant à un champ de vecteurs sur le tore, sans singularité, mais avec au moins une composante de Reeb. D'après ce que l'on vient de remarquer à propos d'un segment allant du bord d'une composante de Reeb à l'autre, comme une section globale doit couper toutes les trajectoires et donc, en particulier, les composantes du bord de chaque composante de Reeb, on voit que *l'existence d'une composante de Reeb est une obstruction à l'existence d'une section globale pour le flot de* X. En fait, si un champ de vecteurs sans singularités du tore a des composantes de Reeb, leur nombre est fini et pair (car pour une composante de Reeb, l'orientation du champ change d'une composante connexe du bord à l'autre). On peut « effacer » les composantes de Reeb (figure 4.7), pour produire un nouveau champ sans singularité et sans composante de Reeb dont l'étude sera suffisante pour déduire les propriétés (à équivalence près) du champ X.

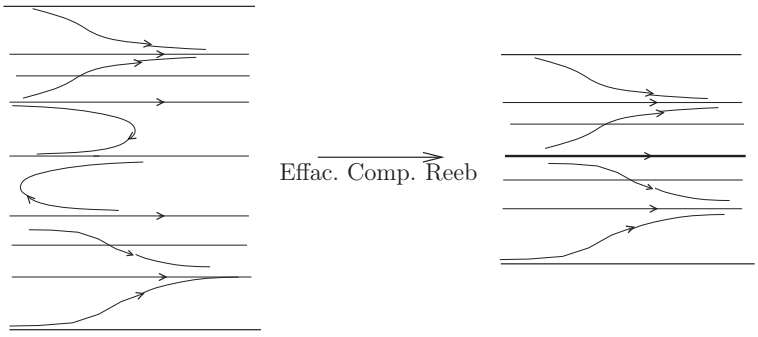


Figure 4.7

Nous allons donc nous intéresser aux champ de vecteurs *sans singularités et sans composantes de Reeb.* Soit X un tel champ. On peut montrer qu'une section transverse γ comme plus haut est automatiquement une section globale. L'espace des champs de T^2 de classe $\mathcal{C}^k$ sans singularité et sans composante de Reeb s'identifie donc à l'espace des champs de classe $\mathcal{C}^k$ ayant une section globale, espace que nous noterons $\chi^k_{SG}(T^2) \subset \chi^k_R(T^2)$. On sait alors que l'étude du champ X à équivalence près se ramène à l'étude de l'application de Poincaré globale $h_X : \gamma \mapsto \gamma$, à conjugaison près. Cette application est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ du cercle $\gamma \sim S^1$, préservant l'orientation (car sinon la surface de T^2 ne serait pas orientable, ce qui n'est pas le cas).

Remarque 4.7. Tout champ de $\chi^k_{SG}(T^2)$ est difféomorphe à un champ X de T^2, transverse à chaque cercle $\gamma_x = \{\{x\} \times S^1\}$. À équivalence $\mathcal{C}^k$ près, c'est-à-dire après multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ et positive, ce champ s'écrit $\frac{\partial}{\partial x} + G(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ pour une certaine fonction G de classe $\mathcal{C}^k$ doublement périodique.

Un tel champ peut évidemment se considérer comme un champ non autonome et 1-périodique dans le temps t et défini sur le cercle paramétré par y. En éliminant la variable x, on peut l'écrire : $G(t,y)\frac{\partial}{\partial y}$ (voir chapitre II-6).

Nous sommes donc amenés à considérer les difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ du cercle S^1, préservant l'orientation. Soit $\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_+(S^1)$ l'espace de tels difféomorphismes. Cet espace a fait l'objet de très nombreuses recherches depuis les premiers résultats obtenus par Poincaré et Denjoy. Nous allons rappeler quelques résultats basiques qui nous concernent directement.

Tout d'abord, on peut définir pour chaque $f \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_+(S^1)$ un *nombre de rotation* $\rho(f)$ qui est en fait un angle à valeurs dans $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si f est la rotation R_α d'angle $\alpha : x \mapsto x + \alpha$, on a évidemment $\rho(R_\alpha) = \alpha$. En général $\rho(f)$ est définie comme une moyenne de la rotation le long de chaque orbite. Précisément on pose :

$$\rho(f) = \mathrm{Lim}_{n\to+\infty}\frac{\tilde{f}^n(x)}{n}, \quad \text{pour} \quad x \in S^1. \tag{4.1}$$

Ici, $\tilde{f}$ est le relevé de f en tant que difféomorphisme de $\mathbb{R}$ et $\tilde{f}^n$ désigne la composition de n fois le difféomorphisme $\tilde{f}$ (comme on l'a introduit à la fin du paragraphe II-6.1). La formule (4.1) suppose que la limite existe et est indépendante du point x choisit sur S^1. Ces propriétés, quoique faciles, ne sont pas complètement évidentes, sauf si f est une rotation $R_\alpha(x) = x + \alpha$, auquel cas $\rho(R_\alpha) = \alpha$ (voir [29]). La fonction « nombre de rotation » est continue par rapport à f, mais n'a pas de bonne propriété de différentiabilité (par exemple, et en général, en restriction à une famille finie de difféomorphismes). Voici un résultat, que nous donnons sans démonstration, qui va nous être utile :

Lemme 4.1. *Soit $f \in \mathrm{Diff}^k_+(S^1)$ tel que $\rho(f)$ soit irrationnel. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ assez petit*

$$\rho(R_\alpha \circ f) \neq \rho(f).$$

Autrement dit, si on compose f avec une « petite rotation » non nulle en considérant $x \mapsto f(x) + \alpha$, on fait varier strictement le nombre de rotation.

Nous allons voir dans la suite que l'hypothèse que $\rho(f)$ soit irrationnel est tout à fait essentielle. Le nombre de rotation est un *invariant par conjugaison*, c'est-à-dire que deux difféomorphismes qui sont conjugués ont le même nombre de rotation. Nous regroupons maintenant dans un seul énoncé des résultats classiques dûs à Poincaré et Denjoy. Ces résultats donnent une réponse partielle à la question inverse : deux difféomorphismes de même nombre de rotation sont-ils conjugués ?

Théorème 4.3. *Soit $f \in \mathrm{Diff}^k_+(S^1)$, $k = 1, \ldots, +\infty$.*

1. *f admet une orbite périodique de type $\frac{p}{q}$ avec $(p,q) = 1$ et $\frac{p}{q} \in [0,1[$ si et seulement si $\rho(f) = \frac{p}{q}$ (une telle orbite est une orbite située sur S^1 comme l'orbite de la rotation $R_{\frac{p}{q}} : x \mapsto x + \frac{p}{q}$: elle est de période q et « tourne p fois autour du cercle » ; voir figure 4.8).*

2. *Si $k \geq 2$ et $\rho(f)$ est irrationnel, alors f est conjugué à la rotation d'angle $\rho(f)$.*

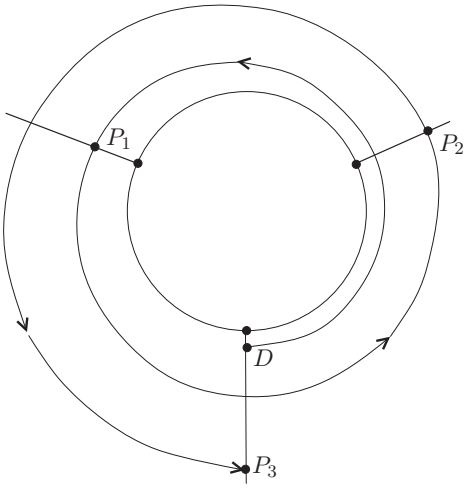


Figure 4.8. Rotation $\mathbb{R}_{2/3}$. L'orbite de période trois, partant du point D, tourne deux fois sur S^1 en passant par les trois points périodiques P_1, P_2 puis P_3.

Remarque 4.8.

1. Lorsque le nombre de rotation de f est rationnel, le point (1) du théorème dit que le difféomorphisme a au moins une orbite comparable à celle de la rotation d'angle $\rho(f)$. Nous allons voir qu'en général le difféomorphisme est loin d'être conjugué à la rotation.

2. Par contre, le fait que le nombre de rotation soit irrationnel implique l'existence de la conjugaison dès que $k \geq 2$. Cette condition laisse à penser que ce résultat, dû à Denjoy, est plus profond que celui du point (1). C'est bien le cas, et Denjoy a montré qu'il pouvait être faux si $k = 1$.

3. Beaucoup de travaux de Kolmogorov, Arnold, Moser (dans le cadre de la théorie KAM qui traite aussi d'autres problèmes de conjugaison du même type) puis de Herman, Yoccoz, ont été consacrés à la généralisation du théorème de Denjoy (point (2)) en classe de différentiabilité supérieure. Nous ne mentionnerons que le résultat final en classe $\mathcal{C}^\infty$ ou analytique dû à Herman : *si un difféomorphisme f du cercle, préservant l'orientation, de classe $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement analytique) a un nombre de rotation de type Brjuno, alors f est conjugué à la rotation d'angle $\rho(f)$ par un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement analytique).*

   Les nombres de type Brjuno sont définis par une condition diophantienne que nous ne donnerons pas explicitement ici. Disons seulement que ces nombres forment un ensemble de mesure de Lebesgue pleine (c'est-à-dire de mesure 1) sur le cercle : autrement dit un choix aléatoire d'un nombre sur $[0, 1[$ nous donnera un nombre de Brjuno avec une probabilité égale à 1 !

Revenons maintenant à la question de la stabilité structurelle dans $\chi^k_R(T^2)$. Nous allons commencer par quelques considérations topologiques sur les cercles de T^2 (c'est-à-dire les courbes simples de T^2 difféomorphes au cercle S^1).

Définition 4.7. Nous dirons qu'un cercle γ d'une surface M est trivial s'il borde un disque.

Nous avons déjà noté qu'un cercle γ de T^2 est ou bien trivial (c'est-à-dire bordant un disque) ou bien difféomorphe au cercle $\{0\} \times S^1$; il revient au même de dire que, dans ce dernier cas, si on coupe T^2 selon γ, on obtient un anneau. Nous allons maintenant considérer des paires de cercles.

Définition 4.8. Soit γ_1 et γ_2 deux cercles disjoints d'une surface M. Nous dirons que ces deux cercles sont parallèles s'ils sont les deux composantes du bord d'un anneau plongé dans M.

Nous avons le résultat suivant pour l'anneau et le tore, de contenu intuitivement évident, mais de preuve non triviale (et qui ne sera pas donnée ici) :

Proposition 4.4.

1. *Si γ est un cercle non trivial de l'anneau $A = S^1 \times [0, 1]$, alors γ est parallèle à chacune des composantes du bord.*

2. *Si γ_1 est γ_2 sont deux cercles non triviaux et disjoints de T^2, alors ils sont parallèles.*

Voir la figure 4.9 pour les notions de cercle trivial ou non.

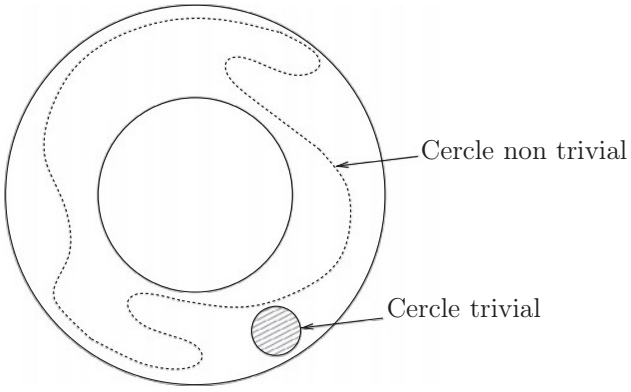


Figure 4.9

Remarquer que le point (2) de la proposition est une conséquence du point (1), car en coupant le tore selon γ_1 on obtient un anneau dans lequel le second cercle non trivial γ_2 se relève en un cercle non trivial. Dès lors, d'après le point (1), γ_1 et γ_2 sont parallèles.

Nous allons considérer les champs de $\chi^k_R(T^2)$ ayant au moins une orbite périodique. Les orbites périodiques d'un tel champ $X \in \chi^k_R(T^2)$ sont toutes non triviales (en effet le disque bordé par une orbite périodique γ doit contenir un point singulier de X, comme on l'a montré dans le chapitre II-6). Si de plus toutes les orbites périodiques sont hyperboliques, on peut trouver près de chacune d'elles un cercle Γ qui leur est parallèle et transverse au champ. En coupant le tore le long de Γ on obtient un champ de l'anneau, transverse au bord et dont les seuls éléments critiques sont des orbites périodiques hyperboliques. Un tel champ est un champ de Morse-Smale sur l'anneau (qui est une surface à bord de genre 0, au sens de la définition II-4.13). Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 4.9. L'espace $\mathcal{MS}^k_R(T^2)$ des champs de Morse-Smale, de classe $\mathcal{C}^k$, sans points critiques sur le tore T^2 est le sous-espace de $\chi^k_R(T^2)$ des champs ayant au moins une orbite périodique et dont toutes les orbites périodiques sont hyperboliques (figure 4.10).

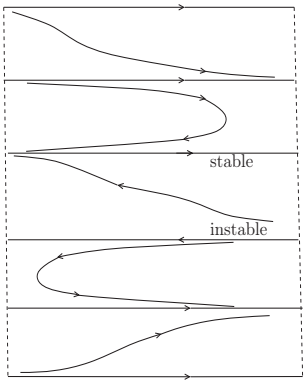


Figure 4.10. Exemple de champ de $\mathcal{MS}_R^k(T^2)$.

Nous pouvons démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. *Soit* $k = 1, \ldots, +\infty$.

1. $\mathcal{MS}_R^k(T^2)$ *est ouvert et dense dans* $\chi_R^k(T^2)$.
2. *Un champ de vecteurs de* $X \in \chi_R^k(T^2)$ *est structurellement stable si et seulement si* $X \in \mathcal{MS}_R^k(T^2)$.

Démonstration. (1) Nous allons tout d'abord montrer qu'un champ de $\chi_R^k(T^2)$ *structurellement stable doit avoir au moins une orbite périodique.* Considérons au contraire un champ de $\chi_R^k(T^2)$ sans orbite périodique. Un tel champ ne peut pas avoir de composante de Reeb, car le bord d'une composante de Reeb est formé d'orbites périodiques. Il appartient à $\chi_{SG}^k(T^2)$, avec une application de retour h sur une transversale globale γ sans point périodique. Il suit du théorème 4.3 que $\rho(h)$ est irrationnel. On applique alors le lemme 4.1. Si $h_\alpha(x) = h(x) + \alpha$, pour des valeurs arbitrairement petites de α, $\rho(h_\alpha)$ est rationnel et le difféomorphisme h_α, ayant des points périodiques par le théorème 4.3, ne peut pas être conjugué à h. Le chemin $\alpha \mapsto h_\alpha$ se relève en un chemin continu $\alpha \mapsto X_\alpha$, continu dans la $\mathcal{C}^k$-topologie. On a donc trouvé des champs X_α avec des orbites périodiques, arbitrairement proches du champ X. Le champ X n'est donc pas structurellement stable dans la $\mathcal{C}^k$-topologie.

(2) Montrons maintenant que toutes les orbites périodiques d'un champ structurellement stable sont hyperboliques. Soit X un champ structurellement stable de $\chi_R^k(T^2)$. Tout d'abord, remarquons que X ne peut avoir qu'un nombre fini d'orbites périodiques. Cela suit du fait, que la propriété, d'avoir toutes ses orbites périodiques hyperboliques, est générique dans $\chi_R^k(T^2)$ (voir l'item 5 du paragraphe 2.6), en invoquant en outre le résultat suivant :

Affirmation. *Un champ $Y \in \chi^k_R(T^2)$ dont toutes les orbites périodiques sont hyperboliques, ne peut avoir qu'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Preuve de l'affirmation. On coupe le tore T^2 le long d'une première orbite périodique de Y. On obtient de cette façon un champ noté $\tilde{Y}$ sur un anneau A, qui est tangent au bord de A. Si Y avait un nombre infini d'orbites périodiques, il en serait de même pour $\tilde{Y}$. On pourrait alors trouver une suite infinie d'orbites périodiques de $\tilde{Y}$ s'accumulant sur un ensemble compact invariant K non vide de A. En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson II-5.2, on voit que K est une orbite périodique de $\tilde{Y}$ (A étant de genre 0, le champ $\tilde{Y}$ n'a pas d'ensemble récurrent non trivial ; d'autre part $\tilde{Y}$ n'a pas de point singulier). Mais les orbites périodiques de $\tilde{Y}$ comme celles de Y sont hyperboliques et donc isolées des autres orbites périodiques. On arrive donc à une contradiction, et donc $\tilde{Y}$, et Y lui-même, n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques. ∎

Suite de la preuve du théorème 4.4. Comme X est structurellement stable, il est équivalent à un champ tel que Y et n'a donc qu'un nombre fini d'orbites périodiques. On montre ensuite que les orbites périodiques de X sont hyperboliques. Pour ce faire, on procède par l'absurde comme dans le cas des champs sur S^1 traités dans la proposition 4.2. Considérons l'une quelconque des orbites périodiques γ de X, *supposée non hyperbolique*. Soit h une application de Poincaré associée à γ sur une section paramétrée par $u \in [-\eta, \eta]$ et coupant γ en $u = 0$. Comme γ n'est pas hyperbolique, on a $h(u) = u(1+g(u))$ avec g fonction continue telle que $g(0) = 0$. Comme γ est isolée, on peut supposer $g(u) \neq 0$ sur $[-\eta, \eta] \setminus \{0\}$. On procède maintenant comme dans la preuve de la proposition 4.1 pour trouver une famille de classe $\mathcal{C}^k$ à un paramètre h_λ, $\lambda \sim 0$, avec $h_0 = h$, telle que $h_\lambda(u) \equiv h(u)$ en dehors du voisinage $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$ et h_λ ait au moins 2 points fixes dans l'intervalle $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$. Cette famille h_λ se relève en une famille de champs au voisinage de γ, qui se prolonge à tout T^2 en une famille X_λ, continue dans $\chi^k_R(T^2)$. Chaque X_λ ayant au moins deux orbites périodiques au voisinage de γ et les mêmes orbites que X en dehors de ce voisinage, a strictement plus d'orbites périodiques que X, ce qui contredit la stabilité structurelle de X.

(3) Montrons que tout champ de Morse-Smale $X \in \mathcal{MS}^k_R(T^2)$ est structurellement stable. Si Y est un champ $\mathcal{C}^k$ assez voisin de X, il aura au voisinage de chaque orbite de X une orbite périodique hyperbolique et de même nature (stable ou instable) et par ailleurs aucune autre orbite périodique. On peut alors modifier Y par une équivalence différentiable (un difféomorphisme de T^2 et une multiplication par une fonction $\mathcal{C}^k$ positive) de façon que Y ait exactement les mêmes orbites périodiques que X avec $X(x) = Y(x)$ pour tout point x dans la réunion de ces orbites périodiques. En introduisant deux cercles tranverses à X et Y, proches

et de part et d'autre de chaque orbite périodique, on représente T^2 comme une réunion d'anneaux (se coupant le long de leur bord uniquement) et sur lesquels les champs X et Y sont, soit du type décrit dans la proposition 4.3, on dira alors que l'anneau est de type A, soit avec des trajectoires transverses aux deux composantes du bord et allant d'une composante à l'autre, on dira que l'anneau est de type B (figure 4.11).

On peut construire par étapes successives, une équivalence entre X et Y. On commence par un anneau de type A quelconque, contenant une orbite γ_0 dans son bord, auquel on applique la proposition 4.3. On étend ensuite l'homéomorphisme d'équivalence à l'anneau de type B adjacent. Notez que l'homéomorphisme est maintenant déterminé sur les deux composantes du bord de cet anneau. En continuant de la même façon, on étend l'homéomorphisme d'équivalence à tous les anneaux que l'on rencontre successivement et qui sont alternativement des B et des paires de type A. On finit la construction avec un dernier anneau A_2 de type A qui est celui adjacent au premier anneau A_1 de type A avec lequel on a commencé la construction, avec en commun l'orbite γ_0 (figure 4.11). La liberté de construction donnée par la proposition 4.3 est essentielle pour que l'homéomorphisme ainsi construit dans la dernière étape ait sur γ_0 la même valeur que celle définie dans la première étape.

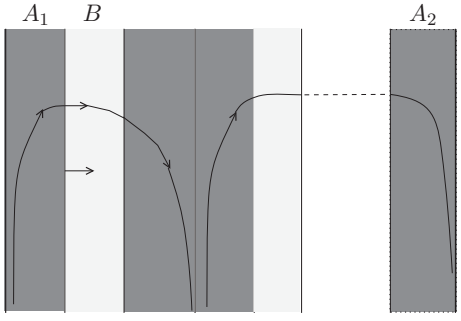


Figure 4.11. En grisé, les anneaux de type A. En plus clair, ceux de type B. Le trajet entre deux traits verticaux épaissis indique une orbite périodique.

(4) Pour finir, montrons que $\mathcal{MS}_R^k(T^2)$ *est ouvert et dense dans* $\chi_R^k(T^2)$. Il est clair que $\mathcal{MS}_R^k(T^2)$ est ouvert. Passons à la question de la densité. On a montré au point (3) que tout champ X de $\chi_R^k(T^2)$ pouvait être approché au sens $\mathcal{C}^k$ par un champ Y avec au moins une orbite périodique. Comme la propriété de n'avoir que des orbites périodiques hyperboliques est générique, on peut approcher Y par un champ Z n'ayant que des orbites hyperboliques. Il suffit de montrer que cette approximation peut être construite en préservant au moins une orbite périodique. Pour ce faire, on peut reprendre la preuve du point (2). Si γ est

une orbite périodique non hyperbolique son application de Poincaré h sur une transversale Σ est donnée localement par $h_0(u) = u(1 + g(u))$, avec $g(0) = 0$, où u est une paramétrisation de la transversale telle que $\gamma \cap \Sigma = \{u = 0\}$. On construit une famille Y_λ, perturbation de $Y_0 = Y$ dont l'application de Poincaré h_λ est donnée au voisinage de $u = 0$ par $h_\lambda(u) = u(1 + \lambda + g(u))$ (voir la preuve de la proposition 4.1). L'orbite de Y_λ par $u = 0$ est donc hyperbolique dès que $\lambda \neq 0$. On peut alors appliquer l'argument de généricité pour obtenir un champ Z dont toutes les orbites sont hyperboliques, et si Z est assez proche de $\tilde{Y}$, ce champ aura au moins une orbite périodique (hyperbolique) proche de $\tilde{\gamma}$. ■

4.5.2. Le cas général

Nous allons maintenant considérer le cas général des champs avec éventuellement des singularités, sur une surface de genre ≥ 1 (on rappelle qu'un champ de vecteurs sur une surface de genre ≥ 2 a toujours des singularités, car la caractéristique d'Euler de la surface est alors non nulle : voir les commentaires de la section II-4.4).

Dans le traitement du cas particulier des champs sans singularités (nécessairement sur T^2, seule surface compacte orientable ayant des champs de vecteurs sans singularités), nous avons vu qu'il était crucial de pouvoir se débarrasser des récurrences non triviales par une petite perturbation du champ. Dans ce cas particulier, la perturbation, donnée par le lemme 4.2, peut être réalisée en classe $\mathcal{C}^k$ pour toute valeur de k. Cette question d'effacement des récurrences non triviales par petite perturbation a été traitée par C. C. Pugh. Son résultat est connu comme le *lemme de fermeture* (*Closing Lemma* en anglais). En voici une version pour les champs de vecteurs sur une variété compacte quelconque :

Lemme 4.2. *Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$, $k = 1, \ldots, +\infty$, sur une variété M de dimension quelconque. Si le champ X admet une orbite récurrente non triviale par le point $x \in M$, on peut trouver un champ Y sur M, de classe $\mathcal{C}^k$,* aussi $\mathcal{C}^1$-proche de X que voulu, *tel que Y possède une orbite périodique par x (autrement dit,* on ferme *l'orbite récurrente en une orbite périodique).*

La preuve du lemme de fermeture est très délicate, même en dimension 2 et il n'est pas question de l'esquisser ici. Le point essentiel à noter est que le champ perturbé ne peut être choisi que $\mathcal{C}^1$-proche du champ X, même si $k = +\infty$. Cela tient à la démonstration elle-même : on perturbe le champ X dans un voisinage tubulaire contenant le point x. En effet, faute d'une connaissance globale du champ X, on doit se limiter à de telles perturbations locales et à

un argument dans lequel on considère des approximations affines du champ X dans ce voisinage tubulaire : c'est cette méthode qui semble limiter à l'ordre 1 la topologie dans laquelle se fait l'approximation. Pour un champ globalement contrôlé comme dans le paragraphe précédent, on a obtenu un cas particulier du lemme de fermeture en classe $\mathcal{C}^k$ quelconque.

En utilisant ce lemme de Pugh, il est facile d'étendre les résultats, démontrés en genre 0 et pour les champs sans singularités, aux champs sur une surface quelconque. Tout d'abord, on étend les définitions des champs de Morse-Smale données, pour les surfaces de genre 0 dans la définition 4.5, et pour les champs sans singularités dans la définition 4.9, à une surface compacte orientable quelconque :

Définition 4.10. Soit M^2 une surface compacte, orientable. L'ensemble de Morse-Smale $\mathcal{MS}^k \subset \chi^k(M^2)$ est l'ensemble des champs de classe $\mathcal{C}^k$ ayant les propriétés suivantes :

1. Le flot de X n'a pas de récurrence non triviale.
2. X n'a qu'un *nombre fini* de points singuliers et d'orbites périodiques, tous supposés hyperboliques et contenus dans l'intérieur de M^2.
3. $X \overline{\pitchfork} \partial M^2$ (c'est-à-dire le champ X est transverse au bord de M).
4. X n'a pas de connection de points de selle.

On montre à la figure 4.12 un exemple de champ de Morse-Smale sur le tore.

Grâce au théorème de Poincaré Bendixson II-5.2, le point (1) est automatiquement vérifié pour les surfaces de genre 0 ainsi que pour les champs sur T^2 avec au moins une orbite périodique, alors que le point (4) est vide pour les champs sans singularités. En utilisant le lemme de fermeture, et par une démonstration analogue à celle esquissée plus haut pour les surfaces de genre 0, on démontre le résultat suivant (on peut trouver les détails de la preuve dans [52]) :

***Théorème 4.5* (Peixoto, 1962).** *Soit M^2 une surface compacte orientable quelconque.*

1. *L'ensemble $\mathcal{MS}^k \subset \chi^k(M^2)$ des champs de Morse-Smale sur M^2, à surface compacte sur M^2, est dense dans la $\mathcal{C}^1$-topologie et ouvert dans la $\mathcal{C}^k$-topologie.*
2. *$X \in \chi^k(M^2)$ est $\mathcal{C}^1$-structurellement stable si et seulement si X est de Morse-Smale.*

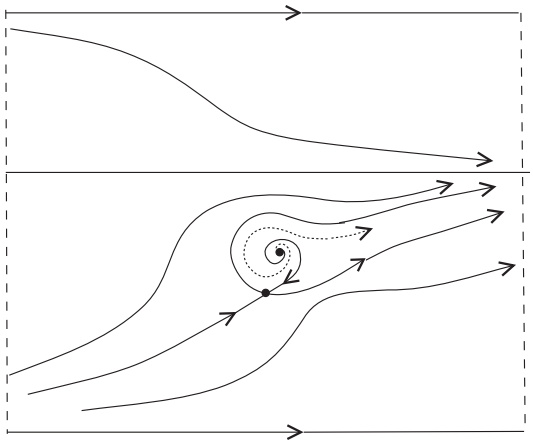


Figure 4.12. Champ de Morse-Smale général sur T^2 avec deux points singuliers : un point de selle et un foyer instable (point source).

4.6. Les systèmes de Morse-Smale généraux

Dans les années 1970, Smale et Palis ont généralisé la notion de *système dynamique de Morse-Smale* en dimension quelconque, aussi bien pour les champs de vecteurs que pour les difféomorphismes. Pour ce faire, on a besoin d'une définition plus générale de la récurrence que celle utilisée jusqu'à présent et qui a été introduite dans le chapitre II-5 :

Définition 4.11. Soit M une variété compacte.

1. Soit f un difféomorphisme de M. On dit que le point $x \in M$ est *errant* pour la dynamique définie par f s'il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $n \neq 0$ de $\mathbb{Z}$, on ait $f^n(U) \cap U = \emptyset$.

2. Soit X un champ de vecteurs de M. On dit que le point $x \in M$ est *errant* pour la dynamique définie par le flot $\varphi_X(t, x)$ supposé complet de X s'il existe un $T > 0$ et un voisinage U de x tels que $\varphi_X(U, t) \cap U = \emptyset$ pour $|t| \geq T$.

On désigne par $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants pour un difféomorphisme f (respectivement par $\Omega(X)$ l'ensemble des points non errants pour le flot d'un champ X). Ces ensembles sont compacts et invariants pour leur dynamique respective.

Remarque 4.9. Un point x est *non errant* pour un difféomorphisme f, par exemple si tout voisinage U de x a des itérés par f deux à deux disjoints c'est-à-dire : $f^{n_1}(U) \cap f^{n_2}(U) = \emptyset$ pour $n_1,\ n_2 \in \mathbb{Z}$ avec $n_1 \neq n_2$. Aussi un point *récurrent* est non errant (un point x est récurrent si des images $f^n(x)$ du point x lui-même reviennent dans tout voisinage U). Par contre, il peut exister des points non errants qui ne sont pas récurrents. Par exemple, un point de selle s peut avoir un point homocline q : un tel point est un point tel que $f^n(q) \to s$ quand n tend vers $+\infty$ et aussi quand n tend vers $-\infty$ (autrement dit, un point homocline est un point à l'intersection des variétés invariantes (globales) stable et instable du point de selle s). Il suit de la définition qu'un point homocline est non récurrent. Par contre, un point homocline q est non errant. En effet, supposons que $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ où $W^s(p), W^u(p)$ sont les variétés stable et instable du point de selle hyperbolique p. Si on considère un voisinage arbitraire du point q, les images $f^n(U)$ vont s'accumuler sur la variété instable en s'approchant de disques de plus en plus grands de cette variété instable. Il s'en suit que pour n assez grand, l'image $f^n(U)$ se rapprochant du point q, va finir par recouper le voisinage U (figure 4.13).

On peut faire des remarques similaires pour les champs de vecteurs.

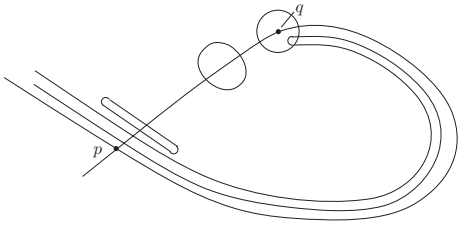


Figure 4.13

Définition 4.12. Soient $k = 1, \ldots, +\infty$ et M une variété compacte quelconque. On dit que $X \in \chi^k(M)$, ou $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$, est de Morse-Smale si :

1. L'ensemble Ω des points non errants se réduit à un nombre fini d'orbites ou de points périodiques.

2. Tous les points ou orbites périodiques sont hyperboliques.

3. Les variétés invariantes sont transverses (ce qui généralise l'hypothèse faite en dimension 2 de la non-existence de connexion de selle (voir le point 4. de la définition 4.10)).

Pour ces systèmes, on a le résultat suivant :

Théorème 4.6 **(Smale-Palis, 1970).** *Les systèmes de Morse-Smale sont structurellement stables.*

La preuve sera admise et elle suit les mêmes lignes que celle que nous avons esquissée pour les champs de vecteurs en dimension 2 (voir théorème 4.4). Les difficultés supplémentaires viennent du fait que les variétés invariantes peuvent s'intersecter, alors qu'elles sont disjointes pour les champs en dimension 2. Par exemple, considérons un difféomorphisme f sur une surface. Supposons que f ait plusieurs points de selle $p_1, \ldots, p_k$ tels que $W^u(p_i) \cap W^s(p_{i+1}) \neq \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, k-1$. La variété instable $W^u(p_1)$ s'accumule, par itération de f, sur la variété instable $W^u(p_2)$ (figure 3.18). De même, la variété instable $W^u(p_2)$ s'accumule sur la variété instable $W^u(p_3)$, ce qui implique que les 2 variétés instables de p_1 et de p_2 s'accumulent sur celles de p_3. On peut faire des remarques similaires pour les variétés stables. Pour prouver la stabilité structurelle, on doit prouver que cette topologie compliquée des points de selle est préservée par perturbation.

Rappelons que Kupka et Smale ont montré que les conditions (2) et (3) dans la définition des systèmes de Morse-Smale sont des conditions génériques, à savoir que génériquement un système dynamique a tous ses éléments critiques (points singuliers, orbites périodiques) hyperboliques, et les variétés invariantes stable et instable de ces éléments critiques sont deux à deux transverses (voir la section 2.7.1 (item 4) et l'item 1 de la remarque 3.13). Par contre, la condition (1) n'est pas générique (sauf comme on l'a vu, pour les difféomorphismes en dimension 1 et aussi pour les champs de vecteurs en dimension 2). En effet, nous allons voir dans le prochain paragraphe qu'il existe des difféomorphismes en dimension 2 structurellement stables avec une infinité d'orbites périodiques. Donc, sur une variété compacte M^n de dimension n, les difféomorphismes ne sont pas génériquement de Morse-Smale dès que $n \geq 2$ et les champs de vecteurs ne sont pas génériquement de Morse-Smale dès que $n \geq 3$. Notons que l'on saute une dimension quand on passe des difféomorphismes aux champs.

4.7. Les ensembles hyperboliques

4.7.1. Le fer à cheval de Smale

Nous avons noté dans le paragraphe précédent qu'une dynamique de Morse-Smale peut avoir des points à l'intersection de variétés invariantes de points de selle différents. De tels points sont appelés *points hétéroclines*. Par contre une dynamique de Morse-Smale ne peut pas contenir de *points homoclines*, c'est-à-dire

à l'intersection des variétés stable et instable d'un même point de selle. En effet, un point homocline est non errant comme on l'a montré dans la remarque 4.9 et, d'après la condition (1) de la définition 4.12, l'ensemble des points non errants se réduit à la réunion des éléments critiques. Nous allons voir que la présence de points homoclines peut impliquer une dynamique compliquée, avec par exemple une infinité de points périodiques. Nous allons nous limiter aux difféomorphismes en dimension 2, et tout d'abord présenter de façon heuristique la fameuse dynamique de *« fer à cheval »* décrite par Smale dans les années 1960. Nous montrerons ensuite qu'une telle dynamique apparaît au voisinage de tout point homocline transverse (voir plus loin la définition de ces points).

Un modèle heuristique du fer à cheval de Smale

Nous appellerons ce modèle : *fer à cheval (de Smale) affine par morceaux* pour une raison que la construction va rendre claire.

On considère le carré $T = [0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$. On va définir une application sur une partie Q de T, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Ce domaine de définition Q est l'union de 2 bandes horizontales disjointes : par exemple $Q = H_1 \cup H_2$ avec $H_1 = [0,1]\times[\frac{1}{8},\frac{3}{8}]$ et $H_2 = [0,1]\times[\frac{5}{8},\frac{7}{8}]$, chacune de largeur égale à $\frac{1}{4}$. On définit f sur Q en prenant sur H_1 et H_2 deux applications affines : $(x,y) \mapsto (a_1 + \lambda x, b_1 + \tau y)$ sur H_1 et $(x,y) \mapsto (a_2 - \lambda x, b_2 - \tau y)$ sur H_2, envoyant H_1, H_2 sur deux bandes verticales, avec $\lambda, \tau > 0$. De plus on désire que :

1. les bandes verticales $V_1 = f(H_1)$ et $V_2 = f(H_2)$ soient disjointes et se projettent horizontalement dans $]0,1[$, avec V_1 à gauche de V_2. Pour cela il est nécessaire que $\lambda < \frac{1}{2}$ et que a_1, a_2 soient choisis convenablement. Remarquez que l'ordre des côtés de H_1 est préservé par f alors qu'il est renversé pour H_2 (par exemple l'image par f du côté horizontal bas de H_2 est au-dessus de l'image du côté haut ; figure 4.14) ;

2. ces bandes V_1 et V_2 se projettent verticalement sur $[0,1]$, c'est-à-dire soient de la forme $V_i = v_i \times [0,1]$ avec v_1, v_2 deux intervalles disjoints de $[0,1]$. Pour cela il est nécessaire que $\tau = 4$ et que b_1, b_2 soient choisis convenablement.

On peut étendre f en un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de T dans $\mathbb{R}^2$ en envoyant la bande intermédiaire entre H_1 et H_2 sur un domaine ayant la forme d'une arche située dans la région $\{y \geq 1\}$, et en envoyant dans la région $\{y \leq 0\}$ les deux autres bandes (les bandes horizontales $\{y \geq \frac{7}{8}\}$ et $\{y \leq \frac{1}{8}\}$ dans T). L'image $f(T)$ ressemble alors à un fer à cheval, d'où le nom de la dynamique. Cette extension est possible car $f|_Q$ envoie l'horizontale $[0,1]\times\{\frac{1}{8}\}$ dans $\{y = 0\}$, l'horizontale $[0,1]\times\{\frac{3}{8}\}$ dans $\{y = 1\}$ et, grâce au choix des coefficients négatifs $-\lambda, -\tau$, envoie

l'horizontale $[0,1] \times \{\frac{5}{8}\}$ dans $\{y = 1\}$, l'horizontale $[0,1] \times \{\frac{7}{8}\}$ dans $\{y = 0\}$ (figure 4.14). Ainsi la surface complémentaire de $Q = H_1 \cup H_2$ dans T est envoyée par f à l'extérieur de T. Seule une partie de $Q = H_1 \cup H_2$ est envoyée dans T.

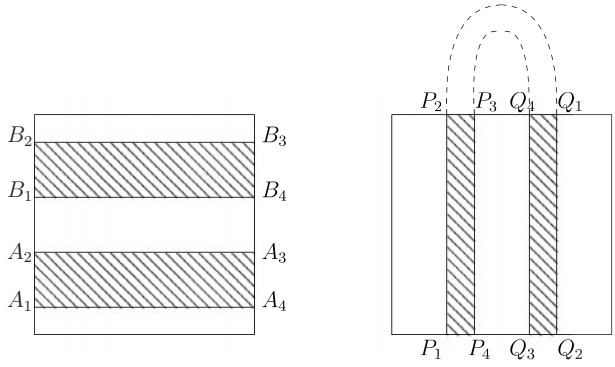


Figure 4.14. T est le carré. Les bandes horizontales hachurées sont les bandes H_1 (resp. H_2) de sommets A_i (resp. B_i), dont les images par f sont les bandes verticales hachurées V_1 (resp. V_2) de sommets P_i (resp. Q_i) de la partie droite de la figure. On a $f(H_1 \cup H_2) = V_1 \cup V_2$. Dans cette figure, $P_i = f(A_i)$ et $Q_i = f(B_i)$. Elle est tracée à l'échelle (à l'exception de l'arche dessinée en tirets) pour $\lambda = 1/4$ et $\mu = 5$ avec $a_1 = 1/4$, $a_2 = 3/4$, $b_1 = -3/4$ et $b_2 = 17/4$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique définie par f. Comme $f(T) \neq T$, on ne peut itérer indéfiniment f que sur un sous-ensemble maximal $K \neq Q$ que nous allons déterminer. Par définition on a :

$$K = \{m \in T \mid f^n(m) \in T, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme $f(T \setminus H_1 \cup H_2) \cap T = \emptyset$, l'ensemble K peut aussi être défini par :

$$K = \{m \in T \mid f^n(m) \in H_1 \cup H_2, \forall n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.2}$$

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous allons tout d'abord déterminer l'ensemble

$$K_k^+ = \{m \in T \mid f^{n-1}(m) \in H_1 \cup H_2, \forall n = 1, \ldots, k\}. \tag{4.3}$$

On a trivialement $K_1^+ = H_1 \cup H_2$. L'image de K_2^+ est égale à $f(K_2^+) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2)$ (en effet $f(m) \in V_1 \cup V_2 \Leftrightarrow m \in H_1 \cup H_2$). Il s'ensuit que K_2^+ lui-même est la réunion des quatre bandes horizontales : $H_{ij} = f^{-1}(V_i \cap H_j)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. Ces quatre bandes se projettent horizontalement sur $[0,1]$ et $H_{ij} \subset H_i$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. Par construction $V_1 \cup V_2 = f(T) \cap T$ et $H_1 \cup H_2 = T \cap f^{-1}(T)$. Il en résulte que $\cup_{i,j} H_{i,j} = \cup_{i,j} f^{-1}(V_i \cap H_j) = f^{-1}(\cup_{i,j}(V_i \cap H_j)) = f^{-1}(T \cap f(T) \cap f^{-1}(T)) = T \cap f^{-1}(T) \cap f^{-2}(T)$ (figure 4.15).

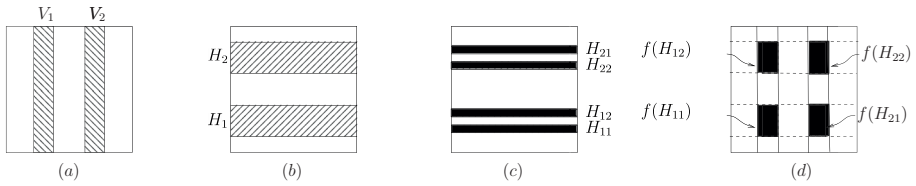


Figure 4.15. (*a*) $V_1 \cup V_2 = f(T) \cap T$. (*b*) $H_1 \cup H_2 = T \cap f^{-1}(T)$. (*c*) En noir $K_2^+ = T \cap f^{-1}(T) \cap f^{-2}(T)$. (*d*) $f(K_2^+) = \cup_{i,j}(V_i \cap H_j)$.

De façon générale, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, 2^k bandes horizontales $H_{l_1 \dots l_k}$, pour $l_1, \dots l_k$ avec $l_i \in \{1, 2\}$:

$$H_{l_1 \dots l_k} = f^{-1}(V_{l_1} \cap H_{l_2 \dots l_k}), \tag{4.4}$$

telles que

$$K_k^+ = \cup\{H_{l_1 \dots l_k} \mid l_1, \dots, l_k\} \text{ avec } l_i \in \{1, 2\}.$$

Ces bandes $H_{l_1 \dots l_k}$ se projettent horizontalement sur $[0, 1]$. Elles ont une largeur qui décroît exponentiellement en fonction de k. Précisément la largeur de la bande $H_{l_1 \dots l_k}$ est égale à $\frac{1}{4}\tau^{-(k-1)}$ (rappelons que $\tau = 4$). Pour $l_2, \dots, l_k$ fixés, les deux bandes $H_{1,2,\dots l_k}$ et $H_{2,2,\dots l_k}$ sont contenues dans l'intérieur de la bande $H_{2,\dots l_k}$. Enfin, par construction, ces bandes sont reliées à la trajectoire de la façon suivante :

$$m \in H_{l_1 \dots l_k} \iff m \in H_{l_1}, f(m) \in H_{l_2}, \dots, f^{k-1}(m) \in H_{l_k}. \tag{4.5}$$

(2) Des considérations similaires vont s'appliquer aux itérations dans le passé, c'est-à-dire à l'ensemble :

$$K_k^- = \{m \in T \mid f^{-n}(m) \in H_1 \cup H_2, \forall n = 1, \dots, k\}. \tag{4.6}$$

Il suffit essentiellement de remplacer f par f^{-1} et les bandes horizontales par des bandes verticales. On a $K_1^- = V_1 \cup V_2$. L'image de K_2^- par f^{-1} est égale à $f^{-1}(K_2^-) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2)$ (en effet $f^{-1}(m) \in V_1 \cup V_2 \Leftrightarrow f^{-2}(m) \in H_1 \cup H_2$). Il s'ensuit que K_2^- lui-même est la réunion des quatre bandes verticales : $V_{ij} = f(H_i \cap V_j) \cap T$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. Ces quatre bandes se projettent verticalement sur $[0, 1]$ et $V_{ij} \subset V_i$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. On remarque que $\cup_{i,j} V_{ij} = \cup_{i,j} f(H_i \cap V_j) \cap T = f(\cup_{i,j}(H_i \cap V_j)) \cap T = f(T \cap f(T) \cap f^{-1}(T)) = T \cap f(T) \cap f^2(T)$ (figure 4.16).

De façon générale, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, des ensembles de 2^k bandes verticales $V_{l_1 \dots l_k}$, pour $l_1, \dots l_k$ avec $l_i \in \{1, 2\}$:

$$V_{l_1 \dots l_k} = f(H_{l_1} \cap V_{l_2 \dots l_k}), \tag{4.7}$$

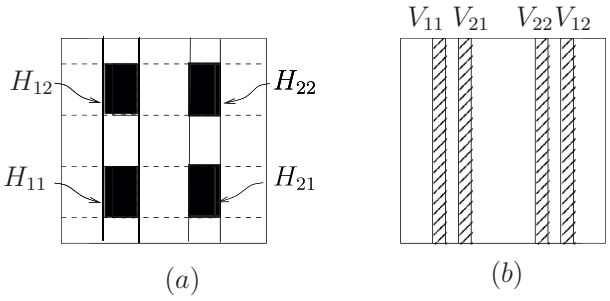


Figure 4.16. (a) $f^{-1}(K_2^-) = T \cap f(T) \cap f^{-1}(T)$. (b) $K_2^- = T \cap f(T) \cap f^2(T)$.

telles que

$$K_k^- = \cup\{V_{l_1 \dots l_k} \mid l_1, \dots, l_k\} \text{ avec } l_i \in \{1, 2\}.$$

Ces bandes $V_{l_1 \dots l_k}$ se projettent verticalement sur $[0, 1]$. Elles ont une largeur qui décroît exponentiellement en fonction de k. Précisément, la largeur de la bande $V_{l_1 \dots l_k}$ est égale à λ^k (rappelons que $\lambda < \frac{1}{2}$). Pour $l_2, \dots, l_k$ fixés, les deux bandes $V_{1,2,\dots l_k}$ et $V_{2,2,\dots l_k}$ sont contenues dans l'intérieur de la bande $V_{2,\dots l_k}$. Enfin, par construction, ces bandes sont reliées à la trajectoire de la façon suivante :

$$m \in V_{l_1 \dots l_k} \Longleftrightarrow f^{-1}(m) \in H_{l_1}, f^{-2}(m) \in H_{l_2}, \dots, f^{-k}(m) \in H_{l_k}. \tag{4.8}$$

À titre d'illustration, on peut dessiner l'ensemble $f^{-2}(T) \cap f^{-1}(T) \cap T \cap f(T) \cap f^2(T)$ (figure 4.17).

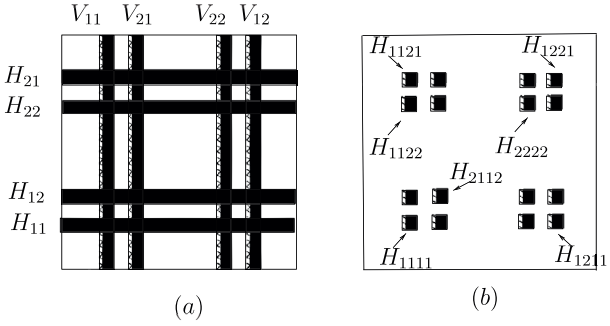


Figure 4.17. (a) $K_2^- \cup K_2^+$. (b) $K_2^- \cap K_2^+ = \bigcap_{k=-2}^{2} f^k(T)$.

(3) Nous pouvons maintenant décrire l'ensemble K. Il suit de la description faite au point (1) que, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $K_p^+ = [0, 1] \times k_p^+$ où k_p^+ est la réunion disjointe de 2^p segments fermés de $]0, 1[$, chacun de longueur $\frac{1}{4}\tau^{-(p-1)}$. Par ailleurs on a $k_{p+1}^+ \subset k_p^+$, chacun des intervalles constitutifs de k_p^+ contenant

dans son intérieur deux intervalles de k^+_{p+1}. L'ensemble $k^+ = \cap_{p=1}^{+\infty} k^+_p$ est donc un *ensemble de Cantor* contenu dans $]0,1[$. Rappelons qu'un ensemble de Cantor est un compact sans point intérieur et parfait (chaque point est point d'accumulation ; tous les ensembles de Cantor sont homéomorphes entre eux (voir [42]). En posant $K^+ = \cap_{p=1}^{+\infty} K^+_p$, on a $K^+ = [0,1] \times k^+$. De la même façon, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $K^-_p = k^-_p \times [0,1]$ où k^-_p est une réunion disjointe de 2^p segments fermés de $]0,1[$ avec des propriétés analogues à celles de k^+_p. Il s'ensuit que $K^- = k^- \times [0,1]$, où k^- est un ensemble de Cantor.

Il suit de la caractérisation (4.2) de K que :

$$K = K^+ \cap K^- = ([0,1] \times k^+) \cap (k^- \times [0,1]),$$

ce qui donne

$$K = k^+ \times k^-.$$

Cette formule montre que K est un ensemble compact inclus dans l'intérieur de T. De plus K est d'intérieur vide et parfait. C'est donc un ensemble de Cantor (plongé dans $\mathbb{R}^2$). Par construction, f laisse K invariant et y induit un homéomorphisme.

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique définie par f sur K. Nous allons tout d'abord introduire la notion très générale d'itinéraire. Cette notion est très importante dans l'analyse des systèmes dynamiques.

Digression sur la notion d'itinéraire

Définition 4.13. Soit M un espace topologique et f un homéomorphisme de M dans M, que l'on va considérer comme définissant une dynamique sur M. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_p\}$ une partition finie de M en p sous-ensembles.

Si $m \in M$, on appelle *itinéraire* de m associé à f et à la partition $\mathcal{P}$, la suite infinie $I_{f,\mathcal{P}}(m)$, indexée sur $\mathbb{Z}$, de symboles dans $\{1, \ldots, p\}$, définie par :

$$I_{f,\mathcal{P}}(m) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \Leftrightarrow f^n(m) \in P_{a_n},\ a_n \in \{1, \ldots, p\},\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

On note $\Sigma_p = \{1, \ldots, p\}^{\mathbb{Z}}$ l'espace des applications de $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$, espace que l'on peut aussi regarder comme le produit infini de copies de $\{1, \ldots, p\}$. L'itinéraire $I_{f,\mathcal{P}}(m)$ est un élément de cet espace.

L'itinéraire du point m est donc la donnée du passage des itérés de m dans les éléments de la partition. Il permet d'obtenir une image approchée de l'orbite, d'autant plus précise que la partition est fine. L'intérêt de l'itinéraire est qu'il

est accessible par exemple à la simulation numérique. On obtient en fait une représentation de la dynamique f dans une dynamique symbolique. L'espace Σ_p de cette dynamique symbolique est l'espace de probabilité des suites de tirages infinis parmi p symboles. On munit cet espace de la dynamique S définie par :

$$S((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{avec} \quad b_n = a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons appeler *translation* cette bijection S (S comme *shift* en anglais) : si on place une virgule à droite du terme a_0 dans la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, l'application S consiste à translater la virgule d'un rang vers la droite.

L'application itinéraire $I_{f,\mathcal{P}}$ définit une *semi-conjugaison* de f sur M, avec S sur Σ_l, car l'on a par construction :

$$I_{f,\mathcal{P}} \circ f = S \circ I_{f,\mathcal{P}}.$$

On parle de semi-conjugaison car l'application itinéraire n'est pas bijective en général.

La dynamique symbolique S est en fait une dynamique topologique. On peut en effet munir Σ_p d'une topologie naturelle, la topologie produite où chacun des facteurs finis $\{1,\dots,p\}$ est muni de la topologie discrète. Dans cette topologie, un système fondamental de voisinages de la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donné par l'infinité dénombrable de « cylindres » $V_N(a), N \in \mathbb{N}$, définis par :

$$V_N(a) = \{(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid b_n = a_n \ \text{ pour } \ |n| \leq N\}.$$

En général, l'application itinéraire ne sera malheureusement pas une application continue.

Remarque 4.10. Si on considère l'espace Σ_p comme un espace de suites de tirages, il est naturel de le munir de mesures de probabilité naturelles. Une telle mesure sera définie en choisissant que la probabilité du tirage du symbole $n \in \{1,\dots,p\}$ vaut $\sigma_n \geq 0$, avec $\sigma_1 + \dots + \sigma_p = 1$. Si la dynamique laisse invariante une mesure de probabilité sur M, on pourra se poser la question de savoir si l'application itinéraire envoie la mesure de Σ_p sur la mesure de M. On entre alors dans le vaste domaine de la théorie ergodique des systèmes dynamiques, que nous n'abordons pas dans cet ouvrage.

La dynamique S sur Σ_p, considérée d'un point de vue topologique aussi bien que d'un point de vue ergodique, est appelée : *translation de Bernouilli sur p symboles.*

Fin de la digression.

Revenons maintenant au fer à cheval affine par morceaux. On introduit dans K une partition à deux éléments $\mathcal{P} = \{K_1, K_2\}$ avec $K_i = H_i \cap K,\ i = 1, 2$. Ici $p = 2$ et on va comparer la dynamique de f sur K avec la translation de Bernouilli sur deux symboles, autrement dit, la dynamique définie par la translation S sur $\Sigma_2 = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$. Les formules (4.5) et (4.8) permettent d'obtenir des propriétés de l'application d'itinéraire associée $I_{f,\mathcal{P}}$:

1. *L'application $I_{f,\mathcal{P}}$ est injective.* Supposons que deux points m et m' de K aient des ordonnées y et y' différentes. Comme les bandes horizontales $H_{p_1 \dots p_k}$ ont une largeur tendant vers 0 avec $k \to +\infty$, on peut trouver k assez grand et deux indices différents : $\{p_1, \dots, p_k\} \neq \{p'_1, \dots, p'_k\}$ tels que $m \in H_{p_1 \dots p_k}$ et $m' \in H_{p'_1 \dots p'_k}$. D'après (4.5), cela implique que m et m' ont des itinéraires différents. On a une démonstration analogue si m et m' ont des abscisses différentes en faisant intervenir les bandes verticales $V_{p_1 \dots p_k}$.
2. *L'application $I_{f,\mathcal{P}}$ est surjective.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$. Pour tout $n \geq 0$ on a $H_{a_0 \dots a_n a_{n+1}} \subset H_{a_0 \dots a_n}$. Comme la largeur des bandes horizontales tend vers 0 avec n, l'intersection $\cap_{n=0}^{\infty} H_{a_0 \dots a_n}$ se réduit à un segment horizontal $[0, 1] \times \{y\}$. De la même façon, si on pose $b_n = a_{-n}$, pour $n \geq 1$ l'intersection des bandes verticales $\cap_{n=1}^{\infty} V_{b_1 \dots b_n}$ se réduit à un segment vertical $\{x\} \times [0, 1]$. Par définition de K, on a $m = (x, y) \in K$. Enfin, grâce à (4.5) et (4.8), l'itinéraire du point m est précisément la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
3. *L'application $I_{f,\mathcal{P}}$ est continue.* Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite quelconque. Soit $V_N(a)$ le voisinage cylindrique de a défini plus haut. Posons $b_n = a_{-n}$ pour tout $n \geq 1$. Grâce à (4.5) et (4.8), il vient $I^{-1}_{f,\mathcal{P}}(V_N(a)) = H_{a_0 \dots a_N} \cap V_{b_1 \dots b_N}$. Cette intersection est un rectangle dont les côtés tendent vers 0 avec N. Ceci implique la continuité de $I_{f,\mathcal{P}}$ au point $m = I^{-1}_{f,\mathcal{P}}(a)$ (point unique comme on l'a montré ci-dessus).

L'application itinéraire est donc une bijection continue entre les deux compacts K et Σ_2. Par conséquent c'est un homéomorphisme de K sur Σ_2. On sait d'autre part que cette application est une semi-conjugaison entre les dynamiques f et S. L'application itinéraire est donc une *conjugaison* par un homéomorphisme (c'est-à-dire une conjugaison topologique entre dynamiques discrètes, telle qu'on l'a définie dans le chapitre d'introduction). Nous pouvons récapituler le résultat ainsi obtenu dans le théorème suivant :

Théorème 4.7. *La dynamique f du fer à cheval affine par morceaux, restreinte au compact invariant K (qui est le compact maximal invariant pour la dynamique f définie sur le carré T), est topologiquement conjuguée à la dynamique translation sur l'espace Σ_2 des suites infinies sur deux symboles (translation de Bernouilli sur deux symboles).*

Pour finir ce paragraphe, voici quelques propriétés dynamiques de la translation de Bernouilli sur k symboles : (Σ_k, S). Ces propriétés sont vérifiées pour tout $k \geq 2$ et donc seront vérifiées pour la dynamique du fer à cheval affine par morceaux (sur son compact maximal K) et plus généralement pour le fer à cheval général que nous allons décrire dans le prochain paragraphe.

1. (Σ_k, S) a une infinité d'orbites périodiques. En effet, les points périodiques correspondent aux suites périodiques. L'ensemble des points périodiques est dense. Cela provient du fait que, pour $l \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, toute suite finie $(a_l, a_{l+1}, \ldots, a_{l+m})$ peut être considérée comme le motif périodique d'une suite périodique.
2. Il existe des $a \in \Sigma_k$ tels que l'orbite par a soit dense. Voici comment construire un tel a. On considère l'ensemble P de toutes les puissances finies (par concaténation) de tous les motifs périodiques (les suites finies comme plus haut). L'ensemble P est dénombrable. On peut donc indexer sur $\mathbb{Z}$ ses éléments : $P = \{\ldots, P_{-m}, P_{-m+1}, \ldots \ldots, P_l, P_{l+1}, \ldots\}$. On construit a en concaténant ces suites finies : $a = (\ldots P_{-m} P_{-m+1} \ldots P_l P_{l+1} \ldots)$. Il est clair que l'orbite de a adhère à tous les points périodiques et, comme l'ensemble des points périodiques est dense, il en est de même pour l'orbite de a.
3. On peut définir la topologie de Σ_k par la métrique $d(a,b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$. Considérons $a, b \in \Sigma_k$ tels que $a \neq b$. Supposons par exemple que $a_n \neq b_n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Alors les deux suites $S^{-n}(a)$ et $S^{-n}(b)$ diffèrent à l'ordre 0. Il en résulte que $d(S^{-n}(a), S^{-n}(b)) \geq 1$. Autrement dit, les itérés de deux points distincts dans Σ_k finissent par s'écarter d'une distance 1 (ce qui est important ici n'est pas la valeur 1, mais le fait que l'on obtient par itération une distance de séparation indépendante de la paire de points distincts). On dit que la dynamique S sur Σ a la propriété de *dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales*. Nous reviendrons sur cette propriété dans le paragraphe 4.7.3.

Fer à cheval général

Nous allons maintenant considérer la dynamique fer à cheval général, telle qu'elle a été introduite par Smale. Nous allons utiliser la présentation faite par J. Moser dans [49] (voir aussi Wiggins [74]). Le fer à cheval affine par morceaux décrit ci-dessus est évidemment un exemple qui nous a servi à vérifier facilement des propriétés qui seront vraies dans le cas général. Nous ne donnerons pas ici le détail des preuves que l'on pourra trouver dans les références précédentes. L'intérêt de cette définition générale est que les hypothèses à vérifier sont $\mathcal{C}^1$-stables, d'où il suivra la stabilité structurelle de la dynamique fer à cheval. Enfin, la généralité des

hypothèses de définition de la dynamique fer à cheval permettra de la retrouver dans certaines dynamiques non linéaires, en particulier près de chaque intersection transverse homocline, comme on le verra dans le paragraphe ci-dessous. On trouvera dans [49] un exemple dans le cadre de la mécanique céleste.

Suivant la présentation de Moser, nous allons tout d'abord donner du fer à cheval une version topologique (ou plutôt une version lipschitzienne) qui est la version la plus générale pour laquelle on retrouve les propriétés du modèle affine par morceaux (l'existence d'un ensemble de Cantor maximum invariant sur lequel la dynamique f est conjuguée à la translation de Bernouilli sur deux symboles). On donnera ensuite une version $\mathcal{C}^1$, plus restrictive, mais qui est celle que l'on peut facilement détecter dans des dynamiques différentiables, et qui est structurellement stable.

(a) Fer à cheval topologique

Pour formuler les hypothèses à supposer sur la dynamique f, nous avons besoin de quelques définitions simples. Le domaine de définition est $T = [0,1] \times [0,1]$ comme ci-dessus. Soit μ un nombre fixé, $0 < \mu < 1$. Une courbe $\{y = h(x)\}$ est dite *courbe horizontale*, si $0 \leq h(x) \leq 1$ pour $0 \leq x \leq 1$ et

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2| \quad \text{pour} \quad x_1, x_2 \in [0,1],$$

(h est une application lipschitzienne de constante μ). Si $h_1(x), h_2(x)$ sont deux courbes horizontales telles que $0 \leq h_1(x) < h_2(x) \leq 1, \ \forall x \in [0,1]$, l'ensemble

$$H = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\},$$

est appelé *bande horizontale*, et on dénote par $\mathcal{H}_\mu$ la collection de toutes les bandes horizontales. Finalement,

$$d(H) = \mathrm{Sup}\{h_2(x) - h_1(x) \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

est appelé diamètre de la bande H.

De la même façon, on définit une *courbe verticale* $\{x = v(y)\}$ comme une courbe telle que $0 \leq v(y) \leq 1$, pour $0 \leq y \leq 1$, et

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2| \quad \text{pour} \quad y_1, y_2 \in [0,1],$$

est une bande verticale, et on dénote par $\mathcal{V}_\mu$ la collection de toutes les bandes verticales.

Voici quelques faits élémentaires concernant ces bandes.

Lemme 4.3. *Si $H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \ldots \supset H_k \supset \ldots$ est une suite de bandes horizontales telles que $d(H_k) \to 0$ si $k \to +\infty$, alors $\cap_{k=1}^{+\infty} H_k$ est une courbe horizontale.*

Démonstration. La preuve est évidente. Les H_k forment une suite décroissante de compacts, dont aucun d'eux n'est vide. Leur intersection est donc non vide. Comme $d(H_k) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$, $\cap_{k=1}^{+\infty} H_k$ est donc non vide et se réduit à une courbe horizontale, que l'on peut voir comme une bande horizontale de diamètre nul. Cette courbe est horizontale car elle peut se voir comme limite uniforme d'une suite de graphes lipschitziens de constante $\mu < 1$ (les composantes du bord des bandes H_k), et elle est donc elle-même un graphe lipschitzien de constante $\mu \leq 1$. ■

Lemme 4.4. *Une courbe horizontale et une courbe verticale quelconques se coupent en un et un seul point de T.*

Démonstration. Un point d'intersection (x, y) d'une courbe horizontale $\{y = h(x)\}$ et d'une courbe verticale $\{x = v(y)\}$ est tel que x est une racine de l'équation $x - v(h(x)) = 0$ car $y = h(x)$. Par les hypothèses de lipschitzité sur h et v, pour $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, on a :

$$|v(h(x_1)) - v(h(x_2))| \leq \mu |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu^2 |x_1 - x_2|.$$

Comme $\mu^2 < 1$, la fonction $x \mapsto x - v(h(x))$ est strictement croissante. Mais puisque cette fonction est négative ou nulle (resp. positive ou nulle) pour $x = 0$ (resp. $x = 1$), elle a précisément une racine et une seule dans $[0, 1]$. ■

Nous pouvons maintenant passer à la définition d'un fer à cheval topologique. On choisit deux bandes horizontales H_1, H_2, avec H_2 au-dessus de H_1 et deux bandes verticales V_1, V_2 avec V_2 à droite de V_1. On considère une application continue f de $Q = H_1 \cup H_2$ dans T qui envoie homéomorphiquement H_1 sur V_1 et H_2 sur V_2. De plus, on suppose que les côtés verticaux de H_i sont envoyés sur les côtés verticaux de V_i et que, de manière similaire, les côtés horizontaux se correspondent. Si l'on veut avoir une application complètement similaire au modèle affine par morceaux, on supposera aussi que $f|_{H_1}$ préserve les orientations haut-bas et gauche-droite et que $f|_{H_2}$ renverse ces deux orientations. Dans ce cas, on peut étendre f à T comme expliqué pour le modèle affine par morceaux, et même de façon $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir [49, 74] pour des développements).

Définition 4.14. On dira que l'application f est un fer à cheval topologique (figure 4.18) s'il existe ν, $0 < \nu < 1$, avec les propriétés suivantes.

1. Soit une bande horizontale H contenue dans $H_1 \cup H_2$. Alors, pour $i = 1, 2$, $f^{-1}(H \cap V_i) = \widetilde{H}_i$ est une bande horizontale et
$$d(\widetilde{H}_i) \leq \nu d(H). \tag{4.10}$$

2. Soit une bande verticale V contenue dans $V_1 \cup V_2$. Alors, pour $i = 1, 2$, $f(V \cap H_i) = \widetilde{V}_i$ est une bande verticale et

$$d(\widetilde{V}_i) \leq \nu d(V). \tag{4.11}$$

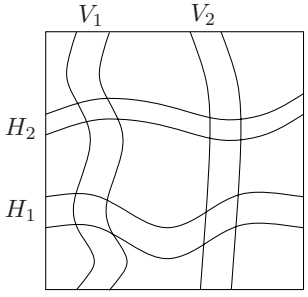


Figure 4.18. Fer à cheval topologique.

Soit $K = \{m \mid f^n(m) \in T, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ le compact maximal invariant de f dans T. Comme dans le paragraphe précédent, on définit une application itinéraire $I : K \mapsto \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ par $I(m) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $a_n = 1, 2$, si et seulement si $f^n(m) \in H_{a_n}$.

Comme pour le fer à cheval affine par morceaux, on peut définir les bandes horizontales $H_{i_1\ldots i_k}$ et verticales $V_{i_1\ldots i_k}$ pour $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2\}$, définies par récurrence à partir de H_1, H_2 et V_1, V_2 par les formules de récurrence (4.4) et (4.7). En utilisant ces formules de récurrence avec les inégalités (4.10) et (4.11), on obtient par récurrence, à partir de $d(H_1), d(H_2), d(V_1), d(V_2) \leq 1$, que

$$d(H_{i_1\ldots i_k}) \leq \nu^{k-1} \quad \text{et} \quad d(V_{i_1\ldots i_k}) \leq \nu^{k-1}. \tag{4.12}$$

À partir des inégalités (4.12), on peut répéter mot pour mot l'étude faite pour le fer à cheval affine par morceaux. On obtient alors pour le fer à cheval topologique le même résultat que celui obtenu pour le fer à cheval affine par morceaux :

Théorème 4.8. *La dynamique f du fer à cheval topologique, restreinte au compact invariant K, est topologiquement conjuguée à la dynamique translation sur l'espace Σ_2 des suites infinies sur deux symboles (translation de Bernouilli sur deux symboles).*

(b) Fer à cheval (de classe) $\mathcal{C}^1$

Les conditions (4.10) et (4.11) sont difficiles à vérifier directement, sauf dans des cas particuliers tels que l'exemple heuristique du fer à cheval affine par morceaux. Dans le cas d'un difféomorphisme de classe au moins $\mathcal{C}^1$, on peut remplacer

ces conditions par des conditions portant directement sur la différentielle de f. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $Q = H_1 \cup H_2 \subset T$ comme plus haut, avec H_1, H_2 ayant des côtés de classe $\mathcal{C}^1$ et donc aussi les rectangles $V_1 = f(H_1)$ et $V_2 = f(H_2)$.

Pour $(x_0, y_0) \in Q$, posons $f(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ avec $x_1 = h(x_0, y_0)$ et $y_1 = v(x_0, y_0)$. En désignant par $h_x = h_x(x_0, y_0), \ldots$ les dérivées partielles, on a $df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$. Si $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur quelconque, on posera $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$.

Définition 4.15. On dira que f est un fer à cheval de classe $\mathcal{C}^1$ s'il existe $\mu,\ 0 < \mu < 1$ tel que :

1. Le champ (constant) de secteurs

$$S^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ \middle|\ |\xi| \leq \mu |\eta| \right\},$$

défini pour tout $m \in H_1 \cup H_2$ est invariant par f, c'est-à-dire :

$$df(m)[S^+] \subset S^+, \forall m \in H_1 \cup H_2.$$

De plus, si $(\xi_0, \eta_0)^\perp \in S^+$ et si (ξ_1, η_1) est son image par f, alors :

$$|\eta_0| \leq \mu |\eta_1|.$$

2. Le champ (constant) de secteurs

$$S^- = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ |\ |\eta| \leq \mu |\xi| \right\},$$

défini pour tout $m \in V_1 \cup V_2$, est invariant par f^{-1}, c'est-à-dire :

$$df^{-1}(m)[S^-] \subset S^-, \forall m \in V_1 \cup V_2.$$

De plus, si $(\xi_0, \eta_0)^\perp \in S^+$ et si (ξ_1, η_1) est son image par f^{-1}, alors :

$$|\xi_0| \leq \mu |\xi_1|.$$

Moser, dans [49], a montré que si f était un fer à cheval $\mathcal{C}^1$ au sens de la définition 4.15 avec $\mu < \frac{1}{2}$, alors il vérifiait les conditions topologiques (4.10) et (4.11) avec $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$. Nous ne reproduirons pas ici cette démonstration. On peut donc appliquer le théorème 4.8 à un tel fer à cheval $\mathcal{C}^1$, pour obtenir la conjugaison de $f|_K$ (K le compact invariant maximal) avec la translation de Bernouilli sur deux symboles. Mais un point très important est que les conditions dans la définition 4.15 sont manifestement stables pour les petites perturbations de classe $\mathcal{C}^1$: pour g suffisamment $\mathcal{C}^1$-proche de f, on peut trouver un carré T_g dépendant continûment de g, sur lequel g est un fer à cheval $\mathcal{C}^1$. La dynamique de g est donc conjuguée sur son compact maximal $K_g \subset T_g$ avec la translation de Bernouilli sur deux symboles, et donc à $f|_K$. Si l'on choisit un voisinage U de K et un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{U}$ de f assez petit pour que $U \subset T_g$ pour tout $g \in \mathcal{U}$, il est relativement facile d'étendre la conjugaison entre f et g à U tout entier. On obtient ainsi que f est localement $\mathcal{C}^1$-structurellement stable au voisinage de K au sens de la définition 4.3. Récapitulons :

Théorème 4.9. *Si f est un fer à cheval de classe $\mathcal{C}^1$ avec une constante μ, $0 < \mu < \frac{1}{2}$, alors f vérifie les conditions (4.10) et (4.11) avec $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$. En conséquence, on peut appliquer le théorème 4.8 à un tel difféomorphisme : si K est le compact invariant maximal dans T, alors $f|_K$ est conjuguée à la translation de Bernouilli sur deux symboles. De plus f est localement $\mathcal{C}^1$-structurellement stable au voisinage de K au sens de la définition 4.3.*

Remarque 4.11. Le fer à cheval affine par morceaux vérifie les conditions de la définition 4.15 avec $\mu = \mathrm{Sup}\{\lambda, \tau^{-1}\}$ et il est donc un fer à cheval $\mathcal{C}^1$ (on peut choisir arbitrairement les deux champs de cônes S^+, S^-). Comme $\lambda < \frac{1}{2}$ et $\tau^{-1} = \frac{1}{4}$, on a $0 < \mu < \frac{1}{2}$ et on peut appliquer le théorème 4.9. En particulier, le fer à cheval affine par morceaux est localement $\mathcal{C}^1$-structurellement stable, ce qui n'a rien d'évident malgré la simplicité de la dynamique.

Fer à cheval au voisinage des points homoclines

La relation entre la présence d'un point homocline transverse et l'existence d'une dynamique de type fer à cheval a été mise en évidence par Smale dans les années 1960. Nous allons plutôt utiliser les résultats de Palis et Takens qui nécessitent un minimum d'hypothèses et dont les preuves sont données de façon lumineuse dans [53]. Nous allons nous contenter de présenter ces résultats. On pourra se reporter à [53] pour les démonstrations. Dans [49], on trouvera un exemple explicite de dynamique fer à cheval dans le cadre de la mécanique céleste.

Soit F un difféomorphisme sur une surface M. On suppose que F a un point fixe hyperbolique p avec un spectre de valeurs propres $\{\lambda_0, \tau_0,\ 0 < \lambda_0 < 1 < \tau_0\}$.

Un point homocline transverse q d'un point de selle hyperbolique p, est un point $q \in W^u(p) \cap W^s(p) \setminus \{p\}$ où $W^u(p)$ et $W^s(p)$ se coupent transversalement en q. On dit que le point homocline est *primaire* si les arcs l^u, joignant p et q dans $W^u(p)$, et l^s, joignant p et q dans $W^s(p)$, forment une courbe simple dans M, c'est-à-dire une courbe homéomorphe à S^1, sans points multiples (figure 4.19).

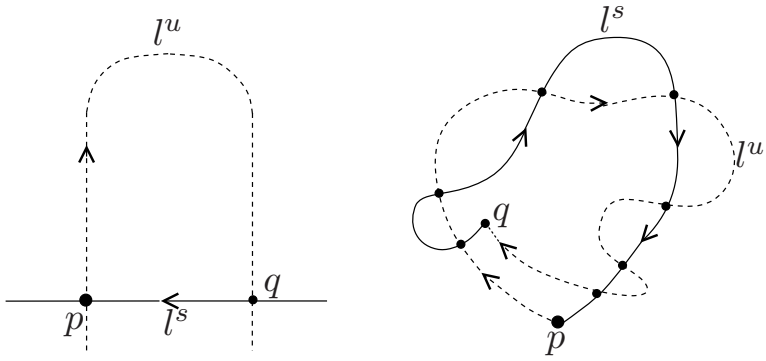


Figure 4.19. À gauche, le point q est un point homocline primaire. À droite, le point q est un point homocline non primaire. Les différents points homoclines sont indiqués par des ronds pointés, tous sont non primaires.

On va utiliser l'existence d'une linéarisation locale de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point fixe hyperbolique *en dimension* 2, démontrée par Hartman [31]. En fait, pour un point de selle hyperbolique en dimension 2, la preuve donnée dans le chapitre 2 fournit des feuilletages stables et instables de classe $\mathcal{C}^1$ (par itération de feuilletages $\mathcal{C}^\infty$ donnés au-dessus d'un domaine fondamental dans $W^s(p)$ et $W^u(p)$ respectivement) : les feuilletages ainsi construits sont $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $W^s(p) \cup W^u(p)$ et $\mathcal{C}^1$ le long de $W^s(p) \cup W^u(p)$. La construction de l'homéomorphisme de linéarisation faite dans le chapitre 2 fournit alors un difféomorphisme, de classe $\mathcal{C}^1$, donnant des coordonnées de linéarisation de classe $\mathcal{C}^1$. C'est un difféomorphisme défini sur un voisinage U de p, $\varphi : [0,1] \times [0,1] \mapsto M$, avec $\varphi([0,1] \times [0,1]) = U$. Dans ces coordonnées, on peut supposer que F est diagonal et donc égal à $F : (x, y) \mapsto (\lambda_0 x, \tau_0 y)$.

Par itération par F, on peut étendre de façon unique ces coordonnées de linéarisation le long de tout segment dans $W^s(p)$, ayant une extrémité en p. Il suffit de choisir U assez petit en fonction de la longueur du segment. De la même façon, on peut étendre ces coordonnées de linéarisation le long de la séparatrice instable $W^u(p)$. Cependant l'existence de points homoclines est une obstruction à une extension simultanée de telles coordonnées à la fois le long de la séparatrice stable et de la séparatrice instable. Dans notre cas, si l'on étend les coordonnées

de linéarisation à la fois au voisinage de l^u et de l^s, ces coordonnées seront bivaluées au voisinage du point q. On trouve donc au voisinage de q deux cartes $\mathcal{C}^1$ de linéarisation, que nous appellerons *carte l^s et carte l^u respectivement.*

Dans la carte l^s de coordonnées (x, y), l'axe $\{y = 0\}$ correspond à $W^s(p)$, l'axe $\{x = 0\}$ correspond à $W^u(p)$, $p = (0, 0)$ et $q = (x_q, 0)$ pour un $x_q > 0$. D'autre part, en utilisant la liberté du choix du feuilletage $\mathcal{F}^u$ au-dessus d'un domaine fondamental dans $W^s(p)$, on peut supposer que dans la carte l^s, les points (x_s, y) sont dans $W^u(p)$. De même on peut supposer que, *dans la carte l^u*, les points de $(x, 0)$ pour $x \sim x_q$ sont situés dans $W^s(p)$ (attention au fait que cette propriété, qui est triviale dans la carte l^s, résulte dans la carte l^u d'un choix convenable des feuilletages $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$). Il en résulte que le difféomorphisme g de classe $\mathcal{C}^1$, faisant passer des coordonnées de la carte l^u aux coordonnées de la carte l^s, est de la forme :

$$g(x, y) = \big(xg_1(x, y) + x_q, (y - y_q)g_2(x, y)\big), \tag{4.13}$$

où $(0, y_q)$ est la coordonnée de q dans la carte l^u.

Maintenant, dans le domaine de la carte l^s, on choisit un rectangle

$$T = \{-a \leq x \leq b,\ -\alpha \leq y \leq \beta\},$$

avec $a, b, \alpha, \beta > 0$. On suppose que l'intérieur de T contient l^s.

On choisit T de façon que, pour un certain $N \in \mathbb{N}$:

1. $T \cap F^n(T)$ consiste en un seul rectangle contenant p pour $0 \leq n < N$,
2. $T \cap F^N(T)$ consiste en deux composantes connexes, l'une contenant p et l'autre contenant q (figure 4.20) c'est-à-dire :

$$\{x = b,\ -\alpha \leq y \leq \beta\} \cap F^N(T) = \emptyset,$$

$$F^N\big(\{-a \leq x \leq b,\ y = \beta\}\big) \cap T = \emptyset.$$

Il est important de noter que l'on peut choisir T de manière que N soit arbitrairement grand. Il suffit de prendre β suffisamment petit. En effet, *plus β est petit,* plus $N = N(\beta)$ est grand et $F^N(T)$ devient une bande de plus en plus étroite le long de l^u. Alors la transversalité de $W^u(p)$ et $W^s(p)$ en q implique que les côtés de T et de $F^N(T)$ se coupent aussi transversalement.

L'application F^N sur T a alors l'allure topologique d'une application de type fer à cheval avec V_1 la composante connexe de $T \cap F^N(T)$ contenant p et V_2 l'autre composante connexe. En fait, il suit de l'étude faite dans [53], sans que cela soit explicitement dit de cette façon, que F^N est un fer à cheval de classe $\mathcal{C}^1$ au sens de la définition 4.15, si N est assez grand.

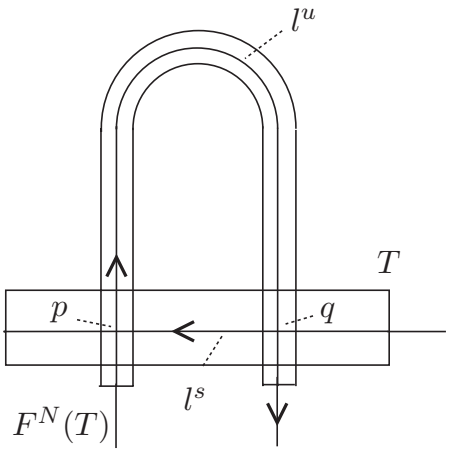


Figure 4.20

On peut comprendre heuristiquement ce résultat de la façon suivante. On va écrire $f = F^N$ dans les coordonnées de linéarisation au voisinage de l^s. Dans ces coordonnées :

$$f|_{H_1}(x, y) = (\lambda_0^N x, \tau_0^N y) \tag{4.14}$$

est linéaire. Par contre, $f|_{H_2}$ est la composition de la même application linéaire avec le difféomorphisme non-linéaire g qui fait passer de la carte l^u à la carte l^s. Maintenant, l'idée importante est que g doit être considéré sur un voisinage V_β de q (vu dans la carte l^s) dont la taille tend vers 0 quand $\beta \to 0$. Il en résulte que $g = g_0 + \varphi$ où g_0 est affine et $\varphi \to 0$ dans la $\mathcal{C}^1$-topologie quand $\beta \to 0$ (pour être tout à fait correct, il faut renormaliser V_β dans un domaine fixe). La formule (4.13) implique que :

$$g_0(x, y) = (-cx + d, -ey + h), \tag{4.15}$$

avec $c, e > 0$. Les signes $-$ devant c et e dans l'expression (4.15) viennent du fait que, au point q, la différentielle de g renverse les orientations des deux axes Ox, Oy.

Il en résulte que, vu dans la carte l^s :

$$f|_{H_2}(x, y) = (-c\lambda_0^N x + d, -e\tau_0^N y + h) + \tilde{\varphi}, \tag{4.16}$$

où $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et tend vers 0 dans la $\mathcal{C}^1$-topologie quand $\beta \to 0$. On obtient donc que f est une $\mathcal{C}^1$-perturbation d'un fer à cheval affine avec $\lambda = c\lambda_0^N, \tau = e\tau_0^N$. Comme on l'a montré dans la remarque 4.11, cette dynamique est un fer à cheval $\mathcal{C}^1$ avec une constante $\mu = \sup\{\lambda, \tau^{-1}\}$. Ici, on voit que $\mu \to 0$ quand $N \to +\infty$ et donc quand $\beta \to 0$. Ainsi la condition $\mu < \frac{1}{2}$ est remplie dès que β est assez petit. Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 4.10. *Soit F un difféomorphisme d'une surface M avec un point fixe de type selle hyperbolique. Supposons que q soit un* point homocline transverse et primaire. *Alors on peut trouver un rectangle T plongé dans M tel que :*

1. *T est un voisinage de l^s, l'arc sur $W^s(p)$ entre p et q,*
2. *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F^N|_T$ est une dynamique de type fer à cheval $\mathcal{C}^1$ avec une constante μ, $0 < \mu < \frac{1}{2}$.*

En conséquence, si K est le compact invariant maximal dans T pour F^N, $F^N|_K$ est conjuguée à la translation de Bernouilli sur deux symboles. De plus F^N est localement $\mathcal{C}^1$-structurellement stable au voisinage de K au sens de la définition 4.3.

4.7.2. Généralités sur les ensembles hyperboliques

Le fer à cheval de Smale est un exemple d'ensemble hyperbolique dont voici la définition générale :

Définition 4.16. Soit f un difféomorphisme sur une variété M et $\Omega \subset M$ un sous-ensemble compact et invariant par f. On dit que Ω est un ensemble hyperbolique (pour f) si, en tout point $x \in \Omega$, il existe une décomposition en somme directe de l'espace tangent : $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ telle que :

1. Les dimensions de E^s_x et E^u_x sont indépendantes de $x \in \Omega$ et la décomposition dépend continûment de $x \in \Omega$.
2. Les fibrés $\mathcal{E}^s = \cup_x E^s_x$ et $\mathcal{E}^u = \cup_x E^u_x$ sont invariants par f, c'est-à-dire : $df(x)[E^s_x] = E^s_{f(x)}$ et $df(x)[E^u_x] = E^u_{f(x)}$ pour tout $x \in \Omega$.
3. Si $||\cdot||$ est une norme quelconque sur le fibré tangent TM, il existe des constantes $c, C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$:

$$||df^n(x)[v]|| < c\lambda^n||v|| \quad \text{si} \quad v \in E^s_x,$$

et

$$||df^{-n}(x)[w]|| < C\lambda^n||w|| \quad \text{si} \quad w \in E^u_x.$$

Les points fixes et les orbites périodiques hyperboliques sont trivialement des ensembles hyperboliques. On peut dire que les ensembles hyperboliques sont aux orbites périodiques hyperboliques ce que les ensembles compacts sont aux ensembles finis. Un ensemble hyperbolique Ω est comme un point fixe hyperbolique muni d'une dynamique interne.

Par chaque point $x \in \Omega$ passent une variété stable $W^s(x)$ et une variété instable $W^u(x)$ qui sont tangentes en x aux espaces E^s_x et E^u_x respectivement. Si x est un point périodique, ces variétés coïncident avec les variétés stable et instable définies dans le chapitre 2. La réunion des variétés stables forme le feuilletage stable qui est globalement invariant : pour tout $x \in \Omega$, on a $f\big(W^s(x)\big) = W^s\big(f(x)\big)$. De plus, les variétés stables $W^s(x)$ qui sont individuellement de classe $\mathcal{C}^\infty$, dépendent de façon continue de x (en fait la dépendance est en général un peu meilleure). On a des propriétés analogues pour les variétés instables.

Pour avoir une bonne description de la structure, on va supposer que l'ensemble Ω est *localement maximal*, c'est-à-dire qu'il est l'unique ensemble invariant dans tous les voisinages U suffisamment petits le contenant. Cette propriété est équivalente à la propriété de *structure de produit locale* : pour chaque paire de points assez proches $\{x, y\} \subset \Omega$, une variété stable locale assez petite dans $W^s(x)$ coupe en un point et un seul une variété instable locale assez petite dans $W^u(y)$, et inversement.

Ce qui suit nécessite d'introduire la définition suivante. Soit f un difféomorphisme et $\Omega(f)$ l'ensemble compact des points non errants de f (introduit au début du paragraphe 4.6).

Définition 4.17. On dit que f vérifie *l'axiome A* si :

(1) $\Omega(f)$ est hyperbolique ;

(2) l'ensemble des points périodiques hyperboliques contenus dans $\Omega(f)$ est dense dans $\Omega(f)$.

Un lemme de fermeture pour les difféomorphismes (également démontré par Pugh) implique que, génériquement en classe $\mathcal{C}^1$, f vérifie *l'axiome A*. On peut montrer que si f vérifie l'axiome A, alors $\Omega(f)$ a une structure de produit locale.

On suppose que f vérifie l'axiome A. Alors on peut aussi montrer que $\Omega(= \Omega(f))$ se décompose de façon unique en une réunion finie d'ensembles disjoints, dite *décomposition spectrale* : $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$, telle que chaque Ω_i est hyperbolique, localement maximal et *topologiquement transitif* au sens qu'il contient une orbite dense (cela revient à dire que si A, B sont deux ouverts de Ω_i, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$). Les Ω_i sont appelés : *pièces basiques* de la décomposition spectrale. Le fer à cheval de Smale est un tel exemple d'ensemble hyperbolique localement maximal et topologiquement transitif (on peut toujours le considérer comme une pièce basique d'une dynamique hyperbolique).

Toute pièce basique Λ a des propriétés similaires à celles que l'on a établies pour le fer à cheval :

1. Λ a la propriété de dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales.

2. La dynamique définie par f sur Λ est topologiquement conjuguée à une dynamique symbolique généralisant la translation de Bernouilli sur l éléments, appelée *sous-translation de type fini sur l éléments.* Cette dynamique est définie de la façon suivante : on considère une $(l \times l)$-matrice $A = (A_{ij})$, dite matrice de transition, dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1. On désigne par $\Sigma_A \subset \Sigma_l = \{1, \ldots, l\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telles que $A_{a_i a_{i+1}} = 1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Clairement, l'ensemble Σ_A est un compact laissé invariant par la translation S. Une sous-translation de type fini sur l éléments est obtenue en restreignant S à Σ_A.

3. f est localement structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage assez petit de Λ.

La preuve de la stabilité structurelle locale s'appuie sur le *lemme de l'ombre* (*Shadowing Lemma* en anglais). Nous allons en dire quelques mots. La notion capitale est celle de *pseudo-orbite :*

Définition 4.18. Soit f un difféomorphisme. On considère une dynamique discrète f sur un espace métrique (M, d). Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Une ε-pseudo-orbite de f est une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que $d(x_{i+1}, f(x_i)) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Une suite finie de points $(x_i)_{i=1}^{n-1}$ est dite une ε-pseudo-orbite périodique si $d(x_{i+1}, f(x_i)) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq i < n$ et $d(x_0, f(x_{n-1})) \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 0$, une pseudo-orbite est une vraie orbite. On peut considérer une ε-pseudo-orbite comme une orbite simulée (par exemple dans une simulation de f sur un ordinateur) avec une erreur d'arrondi de moins de ε à chaque pas.

On a alors le résultat suivant :

***Théorème 4.11* (Lemme d'ombrage).** *Soit f un difféomorphisme vérifiant l'axiome A sur un ensemble hyperbolique Λ. On choisit une distance d quelconque au voisinage de Λ. Soit $\delta > 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque ε-pseudo-orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans Λ, on a la propriété suivante : il existe un point x au voisinage de Λ tel que $d(x_i, f^i(x)) < \delta$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Si Λ est localement maximal, alors $x \in \Lambda$ (on peut dire que l'orbite de x est contenue dans l'δ-ombre de la pseudo-orbite, ou vice-versa).*

Pour démontrer la stabilité structurelle de f au voisinage de Λ, on utilise que si g est ε-proche de f, alors chaque orbite γ_f de f est une ε-pseudo-orbite de g et le lemme d'ombrage permet de trouver une vraie orbite γ_g de g. On construit alors un homéomorphisme de conjugaison envoyant chaque orbite γ_f sur l'orbite γ_g ainsi associée.

Pour démontrer qu'une dynamique hyperbolique f sur une pièce basique Λ est conjuguée à une dynamique symbolique, on construit une *partition de Markov* associée à (f, Λ). Une telle partition de Markov $\{R_1, \ldots, R_l\}$ est une collection finie de fermés (appelés rectangles) dont les intérieurs sont deux à deux disjoints avec la propriété suivante : si les $x_i \in R_{k_i}$, pour $i = 1, \ldots, m$, sont tels que $f(x_i) \in \mathbb{R}_{k_{i+1}}$, alors il existe un point $z \in R_{k_1}$ tel que $f^i(z) \in R_{k_i}$. On appelle *rectangles* les R_i, car on les construit, en général, comme des rectangles dont les côtés sont contenus dans les variétés stable ou instable. Dans le cas du fer à cheval, $\{H_1, H_2\}$ forme une partition de Markov.

Par des arguments analogues à ceux utilisés pour le fer à cheval, on peut alors montrer que $f|_\Lambda$ est conjuguée à une sous-translation de type fini sur l éléments. La matrice de transition A est définie par la condition $A_{ij} = 1$ si et seulement si $f(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$, et on définit l'application de conjugaison entre $f|_\Lambda$ et S en associant à chaque point $x \in \Lambda$ son itinéraire dans la partition de Markov.

Soit M une variété compacte et f un difféomorphisme de M. On suppose que f vérifie l'axiome A (définition 4.17). On a vu que, dans ce cas, on peut décomposer $\Omega(f)$ en une union finie de pièces basiques qui sont chacune localement structurellement stable. Si, de plus, les variétés stables sont transverses aux variétés instables et qu'il n'existe pas de cycles formés par des connections hétéroclines, on dit que f vérifie la propriété de *forte transversalité*; alors Robinson a montré que f était globalement structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$. Inversement, il suit d'une longue suite de travaux, en particulier de Mañé et Palis, qu'un difféomorphisme hyperbolique structurellement stable en classe $\mathcal{C}^1$ vérifie les propriétés d'axiome A et de transversalité forte. En conclusion, on voit donc que la notion de stabilité structurelle est fortement liée à celle d'hyperbolicité. On trouvera une revue très complète des relations entre hyperbolicité et stabilité structurelle dans [53].

4.7.3. Quelques autres exemples de systèmes hyperboliques

On peut inclure le fer à cheval de Smale comme une pièce basique d'une dynamique hyperbolique structurellement stable (dont les autres pièces basiques sont des points fixes hyperboliques, attracteurs ou répulseurs). Voici d'autres exemples d'ensembles hyperboliques pouvant être inclus dans une dynamique hyperbolique structurellement stable.

Le difféomorphisme d'Anosov-Thom

Le difféomorphisme d'*Anosov-Thom* est un difféomorphisme hyperbolique défini sur le tore T^2 et qui n'a qu'une seule pièce basique : le tore en entier.

Soit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de déterminant $+1$ et à coefficients entiers. Elle induit donc par passage au quotient un difféomorphisme (dit linéaire) sur le tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, difféomorphisme que nous noterons encore par F. L'automorphisme linéaire F a deux valeurs propres réelles

$$0 < \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

En conséquence F laisse invariantes par itération les deux familles de droites parallèles aux directions propres

$$\Delta_1 \ : \left\{ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} x \right\} \quad \text{et} \quad \Delta_2 \ : \left\{ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x \right\}$$

de λ_1 et de λ_2 respectivement. Les pentes de Δ_1 et Δ_2 sont donc irrationnelles. En conséquence, les deux familles de droites induisent au quotient sur T^2 deux familles de courbes qui sont des flots irrationnels et donc denses sur T^2 (voir chapitre II-5). La famille associée à Δ_1 est le *feuilletage stable*, et celle associée à Δ_2 est le *feuilletage instable* de F. Dans l'itération par F, la distance euclidienne entre deux points d'une même feuille stable est contractée d'un facteur λ_1 et celle entre deux points d'une même feuille instable est dilatée d'un facteur λ_2. Les deux feuilletages sont laissés globalement invariants par F, au sens que chaque feuille stable est envoyée sur une feuille stable et chaque feuille instable est envoyée sur une feuille instable.

L'origine $p = (0,0) \in T^2$ est un point fixe de type selle hyperbolique. Le quotient dans T^2 des droites Δ_1 et Δ_2 sont respectivement les variétés stable W_p^s et instable W_p^i de p. Ces deux variétés se coupent en un ensemble dense de points homoclines transverses. En prenant un parallélogramme $T \subset T^2$ de côtés parallèles à W_p^s et W_p^i, et en l'itérant, on obtient une sous-dynamique pour une puissance assez grande F^N très similaire à celle du fer à cheval décrit ci-dessus. En conséquence, par exemple, F a une infinité d'orbites périodiques. Comme le parallélogramme T peut être pris arbitraire, on en déduit facilement que f est *topologiquement transitif* au sens que nous avons déjà défini plus haut : si U, V sont deux ouverts non vides quelconques de T^2, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$. En fait, il est possible d'étudier directement et globalement F comme l'a fait Anosov, qui a établi, dans ce cas particulier, les propriétés mentionnées plus haut pour toutes les pièces basiques :

1. L'ensemble des points périodiques (tous hyperboliques) est dense sur T^2.

2. Presque toutes les orbites périodiques sont denses.

3. La dynamique F est conjuguée à une dynamique symbolique.

4. La dynamique F est $\mathcal{C}^1$-structurellement stable.

La complexité de la dynamique provient du passage au quotient sur le tore où on travaille modulo un. En effet, par itération, un parallèlogramme va venir se recouper indéfiniment. L'intersection est formée de sous-parallélogrammes de plus en plus fins dont le nombre augmente indéfiniment (figure 4.21).

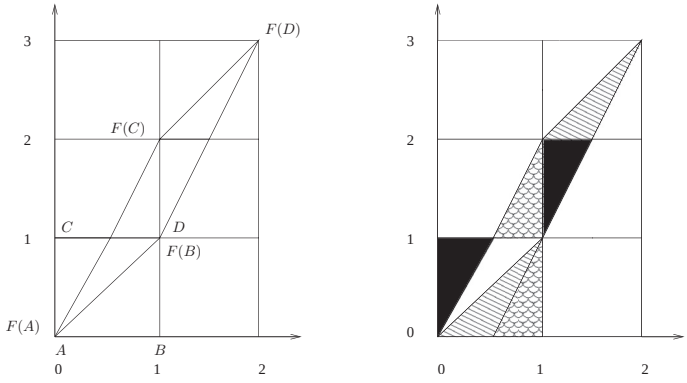


Figure 4.21. À gauche : image par F du carré unité ABDC. À droite : amorce de la stratification du carré.

On observe par le hachurage, sur la partie droite de la figure, par passage au quotient sur le tore, l'amorce de la stratification du carré unité. Pour plus de détails, on pourra consulter [4] p. 132-138.

L'attracteur torique hyperbolique

Cet attracteur est aussi appelé *attracteur de Williams-Smale*. La dynamique est un difféomorphisme f du tore solide $T = D^2 \times S^1$ dans lui-même. Le disque D^2 est le disque unité dans le plan complexe : $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, et S^1 est paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On définit :

$$f(\theta, z) = \left(2\theta, \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right).$$

Le choix des valeurs $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ n'est pas essentiel ; on peut remplacer ces valeurs par $a, b > 0$, tels que $a < b$ et $a + b < 1$. L'application f est un plongement de T dans lui-même. L'image $f(T)$ est un sous-tore solide qui s'enroule deux fois

dans T dans la direction de l'âme S^1 du tore solide (figure 4.22). Cette image est de diamètre plus étroit mais de longueur à peu près deux fois supérieure à T. L'ensemble

$$K = \cap_{n=0}^{\infty} f^n(T)$$

est un compact invariant de f dans T. C'est un attracteur dont le bassin est T en entier. D'autre part, il est facile de vérifier que K est un attracteur hyperbolique. En effet, f envoie le disque $D^2 \times \{\theta\}$ dans le disque $D^2 \times \{2\theta\}$ en y contractant les distances par un facteur $\frac{1}{4}$. Il en résulte que, pour tout $(\theta, z) \in K$, $E^s_{(\theta,z)} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est la direction stable et le disque $D^2 \times \{\theta\}$ est la variété stable. Les directions instables sont de dimension 1, dans la direction du facteur S^1. L'ensemble K est la réunion de ses variétés instables. Il est localement homéomorphe au produit d'un Cantor $k \subset D^2$ par l'intervalle I (les segments $m \times I$ sont contenus dans les variétés instables). L'ensemble K est dit *expansif* au sens où f dilate les variétés instables dont il est la réunion.

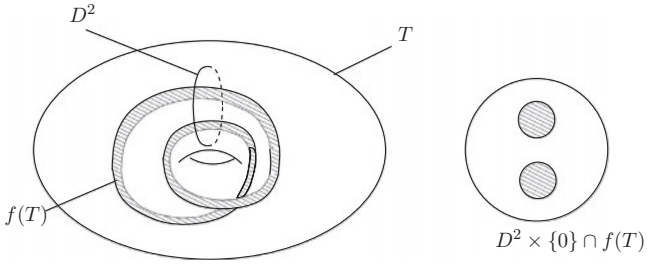


Figure 4.22

La dynamique de f sur K est topologiquement conjuguée à une dynamique symbolique appelée *solénoïde* $\mathcal{S}^1$ au-dessus de l'application $S_2 : \theta \mapsto 2\theta$ du cercle S^1. Le solénoïde $\mathcal{S}^1$ est le compact obtenu comme limite inverse des applications $g_i : S^1 \mapsto S^1$ où chaque $g_i = S_2$ avec S_2 définie ci-dessus. Les éléments de $\mathcal{S}^1$ sont les suites $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de S^1, telles que $S_2(\theta_{i+1}) = \theta_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ (on munit $\mathcal{S}^1$ de la topologie induite par la topologie produit sur $(S^1)^{\mathbb{N}}$). On définit une dynamique $\hat{S}_2$ sur $\mathcal{S}^1$ par :

$$\hat{S}_2((a_i)) = (b_i) \quad \text{avec} \quad b_i = a_{i+1}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

On trouvera dans [75] la construction de l'homéomorphisme de conjugaison $K \mapsto \mathcal{S}^1$ entre $f|_K$ et S_2. On vérifie facilement que S_2 est topologiquement transitif et a un ensemble dense de points périodiques. Il en résulte que K est une pièce basique hyperbolique pour f.

Il est facile d'étendre f en une dynamique hyperbolique sur S^3. Pour cela on recolle deux copies de T, et on définit un difféomorphisme F de S^3 en prenant

f sur une copie et f^{-1} sur l'autre. On obtient alors un difféomorphisme vérifiant l'axiome A avec deux pièces basiques, chacune homéomorphe à K, l'une attractrice et l'autre expansive. La propriété de transversalité forte est ici trivialement vérifiée. En fait, il est facile de montrer directement que F est structurellement stable.

4.8. Au-delà de la stabilité structurelle

4.8.1. Non-généricité de la stabilité structurelle

Il est très tentant d'imaginer que la stabilité structurelle est une propriété générique. C'est probablement ce qu'avait imaginé Smale quand il a commencé ses travaux sur les systèmes dynamiques dans les années 1960. Malheureusement, il s'est vite rendu compte que tel n'était pas le cas.

Voici une construction montrant que la stabilité structurelle n'est pas $\mathcal{C}^2$-générique. Nous allons décrire le premier exemple qui a été décrit pour les difféomorphismes sur le tore T^3. On a ensuite obtenu des exemples pour les difféomorphismes en dimension 2, exemples plus délicats à décrire. Rappelons que la stabilité structurelle est générique pour les difféomorphismes de dimension un.

On considère des coordonnées $(x, y, z) \in T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Sur le 2-tore $T_0^2 = \{z = 0\} \subset T^3$, on met le difféomorphisme d'Anosov-Thom que l'on note $g_0(x, y)$. On va étendre g_0 en un difféomorphisme G de T^3. On suppose que G admet T_0^2 comme ensemble invariant hyperboliquement attractant. Par exemple, G est donné dans un voisinage $\{z \leq \varepsilon\}$ de T_0^2 par :

$$G(x, y, z) = \left(g_0(x, y), \frac{1}{2}z\right).$$

On suppose que le 2-tore $T_1^2 = \{z = \frac{1}{2}\}$ est aussi invariant. On suppose que $g_1 = G|_{T_1^2}$ est un difféomorphisme de Morse-Smale sur T_1^2 avec un puits hyperbolique en $(0, 0)$. On étend g_1 au voisinage de T_1^2 de façon à ce que ce tore soit un répulseur hyperbolique. Par exemple G est donné dans un voisinage $\{|z - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon\}$ de T_1^2 par :

$$G(x, y, z) = \left(g_1(x, y), 2\left(z - \frac{1}{2}\right)\right).$$

On suppose que pour tout point $m \notin T_0^2 \cup T_1^2$, l'orbite $G^n(m)$ converge vers T_0^2 pour $n \to +\infty$ et converge vers T_1^2 pour $n \to -\infty$. En particulier, le point

$p = (0, 0, \frac{1}{2})$ est un point de selle, avec une variété stable de dimension 2 contenue dans T_1^2, et une variété instable de dimension 1, formées de deux trajectoires. Soit γ celle contenue dans la région $0 < z < \frac{1}{2}$.

Revenons à la dynamique au voisinage de T_0^2. Rappelons que g_0 a un ensemble dense de points périodiques de type selle de période $P(q)$. Soit q l'un quelconque de ces points. La variété stable est la droite $l^s(q)$ (voir le paragraphe 7.2). Le point q est aussi un point de selle hyperbolique périodique en dimension 3. Vu dans T^3, le point q a une variété stable $W^s(q)$, de dimension 2, contenant $l^s \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Supposons maintenant que γ ait un contact quadratique avec $W^s(q)$ (figure 4.23).

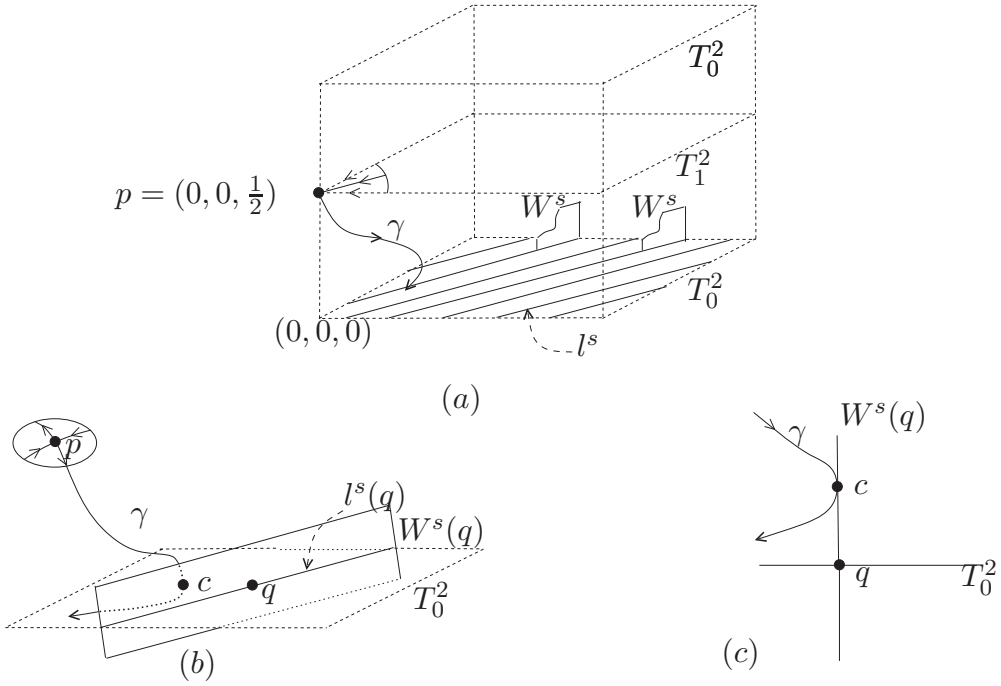


Figure 4.23

Commentaires de la figure 4.23. En (a) et en pointillés, les tores T_0^2 et T_1^2 (les plans) et le domaine fondamental de tore T^3 (le cube : on a deux fois T_0^2) ; on y représente en traits continus les éléments dynamiques : p avec sa variété dynamique stable dans T_1^2 et la « moitié » de sa variété instable γ, qui est une séparatrice instable de dimension 1. Les flèches montrent la dynamique. l^s est le feuilletage (Anosov) de dimension 1 stable sur T_0^2. W^s est le feuilletage de dimension 3 qui coupe T_0^2 selon le feuilletage l^s composé de lignes de *pente irrationnelle*. Enfin, on y représente le quart d'un disque dans la variété stable de p, c'est-à-dire dans T_1^2. Dans (b),

on montre le disque précédent dans sa totalité ainsi que les détails du contact quadratique en c entre γ et $W^s(q)$, remontré en coupe dans la partie (c) de la figure qui est la partie (b) réduite à la dimension 2 (dans (c), $l^s(q)$ se réduit au point q). ■

Si on considère un difféomorphisme G' assez $\mathcal{C}^2$-proche de G, les dynamiques g_0 et g_1 sont préservées, à conjugaison près, sur des 2-tores T'_0, T'_1 proches de T^2_0 et T^2_1 respectivement. Les orbites de G' en dehors de $T'_0 \cup T'_1$ continuent d'aller de T'_1 à T'_2. Le point p est perturbé en un point de selle p', ensemble α-limite d'une orbite γ'. Cette orbite garde un contact quadratique avec une feuille du feuilletage stable associé à T'_0. Mais il n'y a aucune raison pour que cette feuille soit la variété stable d'un point périodique de T'_0, et encore moins que la période soit égale à celle de q. Au contraire, on peut trouver un difféomorphisme G', arbitrairement $\mathcal{C}^2$-proche de G, tel que le contact quadratique de la variété stable du point q passe à la variété stable d'un point périodique q' de G', avec une *période* $P(q') \neq P(q)$. Comme cette période est manifestement un invariant topologique pour la conjugaison, on en déduit que G n'est pas conjugué à G'. Évidemment, on peut remplacer dans cet argument le difféomorphisme G par n'importe quel difféomorphisme assez $\mathcal{C}^2$-proche.

En conclusion, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ du difféomorphisme G dans la $\mathcal{C}^2$-topologie, tel qu'aucun difféomorphisme $\widetilde{G} \in \mathcal{U}$ ne soit structurellement stable. La stabilité structurelle n'est donc pas générique au sens de la $\mathcal{C}^2$-topologie, dans l'espace des difféomorphismes du tore T^3.

4.8.2. Attracteurs non hyperboliques

Comme les dynamiques hyperboliques ne sont pas génériques, on doit inclure l'étude de dynamiques non hyperboliques si l'on veut obtenir une description d'un ensemble de dynamiques génériques. Les propriétés de stabilité recherchées seront évidemment moins strictes que la stabilité structurelle. C'est le but poursuivi par les recherches contemporaines sur les systèmes dynamiques. Deux références sur ces recherches contemporaines sont, d'une part, le livre de Palis et Takens [53] décrivant des mécanismes pour quitter la région des dynamiques structurellement stables et les dynamiques rencontrées à la frontière de cette région et, d'autre part, le livre de Bonatti, Diaz et Viana [6] qui fait le point sur les dynamiques non-uniformément hyperboliques.

Pour finir, rappelons quelques attracteurs fameux, non hyperboliques et appelés parfois, pour cela, *attracteurs étranges* :

1. **Attracteur de Feigenbaum.** Cet attracteur apparaît pour une valeur particulière μ_∞ du paramètre μ paramétrant la famille d'applications unimodales
$$f_\mu(x) = \mu x(1-x).$$
Rappelons que pour $\mu \in [0,4]$, l'application f_μ envoie, de façon non inversible, l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même. Pour une suite croissante (μ_i) de valeurs du paramètre, l'application unimodale passe par une application de doublement de période (voir l'exemple 6 du paragraphe 5.2), où une orbite périodique stable γ_i de période 2^i bifurque en une orbite périodique stable de période 2^{i+1}, en se transformant en une orbite instable $\tilde{\gamma}_i$ (de période 2^i). La suite converge de façon géométrique vers la valeur μ_∞. L'application f_{μ_∞} a un compact invariant F, dit compact de Feigenbaum, qui est la limite des orbites périodiques stables γ_i. L'application f_{μ_∞} a aussi une infinité d'orbites périodiques instables, limite des orbites périodiques instables $\tilde{\gamma}_i$ (voir la figure 1.1 du chapitre 1). La réunion de ces orbites périodiques instables contient F dans sa fermeture. Il en résulte que F ne saurait être un attracteur au sens usuel (et encore moins un attracteur hyperbolique). En fait, le bassin de F est un ouvert auquel il faut enlever tous les points périodiques instables qu'il contient.

   L'intérêt pour F vient de sa relation avec la théorie de la *renormalisation* (voir par exemple le livre de de Melo et Van Strien [17]).

2. **Attracteur de Hénon.** On considère le difféomorphisme du plan :
$$(x,y) \mapsto (y+1-ax^2, bx),$$
où a et b sont deux paramètres. Dans le cas particulier de l'application de Hénon canonique, on a $a = 1{,}4$ et $b = 0{,}3$. Pour ces valeurs, l'application de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de ces paramètres, l'application peut être chaotique, avoir un régime intermittent, ou bien converger vers une orbite périodique stable.

   Cette application a été introduite par Hénon comme un modèle simplifié de l'application de retour d'une section de l'attracteur de Lorenz. L'application de Hénon canonique possède un attracteur non hyperbolique, qui est la fermeture de la variété instable d'un point de selle hyperbolique.

3. **L'attracteur de Lorenz.** L'attracteur de Lorenz (figure 1.5) apparaît dans une équation différentielle (voir (1.4)) en dimension 3, qui est elle-même un modèle très simplifié pour des équations de rouleaux de convection (instabilité de Rayleigh-Bénard) existant dans des équations modélisant l'atmosphère.

5

LES BASES DE LA THÉORIE DES BIFURCATIONS

5.1. Introduction

Dans de nombreux cas, on est amené à considérer un système dynamique dépendant de plusieurs paramètres (ou bien, si l'on préfère, dépendant d'un seul paramètre vectoriel). Par exemple, dans l'équation différentielle d'un système électrique : capacités, résistances, amplitudes des sources d'énergie, etc., sont des paramètres que l'on peut faire varier.

Se pose alors le problème de la variation des caractéristiques des solutions du système en fonction de la variation du paramètre. En particulier, si un équilibre E est réalisé pour une valeur d'un des paramètres, cet équilibre est-il maintenu (ou plutôt changé continûment) quand le paramètre varie ? Ou bien est-il détruit pour certaines valeurs critiques du paramètre ? Peut-on alors décrire l'évolution vers un autre état d'équilibre ? C'est à ce genre de questions que la théorie des bifurcations veut apporter des réponses.

Outre un examen assez détaillé de la théorie des catastrophes de René Thom, on expose, dans ce chapitre, les notions de base indispensables à l'étude des bifurcations des systèmes dynamiques ainsi que quelques méthodes importantes : la réduction à une variété centrale et l'utilisation de formes normales.

5.2. Premiers exemples de bifurcation

Nous allons commencer par des exemples simples, mais qui serviront de modèle local pour les bifurcations génériques que nous allons décrire par la suite.

Exemple 1

Considérons le champ de vecteurs $X^1_\lambda(x) = (x^2 + \lambda)\frac{\partial}{\partial x}$. Ce champ est défini sur $\mathbb{R}$ et dépend du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. On dira aussi que X^1_λ est une *famille* de champs de vecteurs (dépendant du paramètre λ). Remarquez que le champ $X^1_\lambda(x)$ n'est complet pour aucune valeur de λ, comme le seront la plupart des exemples de champs que nous proposerons dans ce chapitre. Cela n'a évidemment aucune incidence sur la description de leurs portraits de phase. En particulier, la dynamique du champ X^1_λ est facile à appréhender pour toute valeur de λ :

1. Pour $\lambda > 0$, la fonction $x^2 + \lambda$ est strictement positive pour tout x. Le champ a une seule orbite, la droite $\mathbb{R}$, orientée vers la droite.

2. Pour $\lambda = 0$, il apparaît un point singulier en $x = 0$. De plus, le champ a deux orbites régulières de part et d'autre de 0, toutes les deux orientées vers la droite (figure II-3.5).

3. Pour $\lambda < 0$, le champ a deux points singuliers $x^+_\lambda = \sqrt{|\lambda|}$ et $x^-_\lambda = -\sqrt{|\lambda|}$. La valeur propre en x^-_λ, égale à $-2\sqrt{|\lambda|}$, est négative. Ce point est donc un point attracteur hyperbolique. De même, il est immédiat de voir que le point x^+_λ est un point répulseur hyperbolique. Le champ a d'autre part trois orbites régulières : $\{x < x^-_\lambda\}, \{x > x^+_\lambda\}$ qui sont orientées vers la droite et $\{x^-_\lambda < x < x^+_\lambda\}$ entre les deux points critiques, qui est orientée vers la gauche.

Remarquons que si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, les champs $X^1_{\lambda_1}$ et $X^1_{\lambda_2}$ sont trivialement topologiquement équivalents : par exemple, ils sont équivalents par l'homéomorphisme identique. De même, si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, les champs $X^1_{\lambda_1}$ et $X^1_{\lambda_2}$ sont aussi topologiquement équivalents : ils sont équivalents par n'importe quel homéomorphisme envoyant $x^+_{\lambda_1}$ sur $x^+_{\lambda_2}$ et $x^-_{\lambda_1}$ sur $x^-_{\lambda_2}$. Par contre, le champ X_0 joue un rôle bien particulier car il n'est équivalent à aucun des autres champs X_λ pour $\lambda \neq 0$. Pour cette raison, on dit que $\lambda = 0$ est l'(unique) *valeur de bifurcation* de la famille X_λ : cette valeur est située entre deux ouverts de l'espace du paramètre dans lesquels le type topologique du champ est constant, mais différents d'un ouvert à l'autre (ainsi que pour la valeur de bifurcation). L'ensemble ou *diagramme de bifurcation* est formé du seul point $\{\lambda = 0\}$.

Si l'on fait décroître λ de $+\infty$ à $-\infty$, la bifurcation de la famille se résume donc de la façon suivante : on n'a pas de point singulier tant que $\lambda > 0$; un point singulier est créé lorsqu'on arrive à $\lambda = 0$; ce point se sépare en deux points singuliers pour $\lambda < 0$ (qui s'éloignent l'un de l'autre comme $\sqrt{|\lambda|}$).

Pour mieux comprendre la bifurcation, il est intéressant de considérer l'ensemble des points singuliers dans l'espace des $\{(x, \lambda)\}$, espace produit de l'espace

de phase des x par l'espace du paramètre λ. Cet ensemble est formé des points de la parabole $\{x^2+\lambda=0\}$ dont une des branches est formée des points attracteurs (x_λ^-,λ) et l'autre branche des points répulseurs (x_λ^+,λ). En coupant cette parabole par la droite $\mathbb{R}\times\{\lambda\}$ pour $\lambda<0$, on obtient les deux points singuliers dont on peut visualiser la variation en fonction de λ en faisant changer le paramètre. On peut compléter la figure en indiquant l'orientation des trajectoires régulières, ce qui fournit le portrait de phase de X_λ, pour tout λ (figure 5.1).

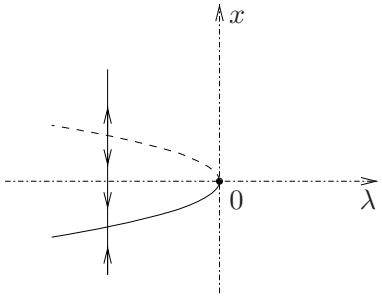


Figure 5.1

Du point de vue de la dynamique, il apparaît donc un attracteur x_λ^- pour $\lambda<0$, dont le *bassin d'attraction* est l'ouvert $(-\infty,x_\lambda^+[$. Cet attracteur disparaît pour $\lambda>0$. C'est pourquoi Thom a appelé la catastrophe correspondante : *catastrophe de mort ou de bord.* La figure de la parabole dessinée dans le plan (x,λ) et se projetant sur l'axe du paramètre a suggéré la dénomination de *catastrophe (ou bifurcation) de pli.* On utilisera cette appelation par la suite, de façon alternative à la désignation de *bifurcation de selle-nœud,* de connotation plus « systèmes dynamiques ». Cette dénomination est donnée de façon impropre et correspond à l'extension en dimension 2 que l'on va maintenant décrire.

Exemple 2

Considérons maintenant la famille de champs de $\mathbb{R}^2$:

$$Z_\lambda^{1,-}(x,y)=(x^2+\lambda)\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}.$$

On voit que l'on passe de l'exemple 1 à cet exemple en ajoutant une composante sur laquelle on a mis le champ linéaire $-y\frac{\partial}{\partial y}$. Aussi, il est très facile de déduire l'étude de $Z_\lambda^{1,-}$ de l'étude de X_λ^1 faite dans l'exemple 1. Si l'on considère que l'axe des x est horizontal et l'axe des y est vertical, le flot de $Z_\lambda^{1,-}$ est obtenu en composant le mouvement horizontal donné par le flot de X_λ^1 et un mouvement de contraction vertical vers l'axe des x.

Le diagramme de bifurcation de $Z_\lambda^{1,-}$ est donc le même que celui de X_λ^1 avec une seule valeur de bifurcation en $\lambda = 0$. Seule change évidemment la nature des portraits de phase. Par exemple, pour $\lambda = 0$, le champ $Z_0^{1,-}$ a un point singulier en $(0, 0)$ qui est topologiquement de type selle dans le demi-espace $\{x \geq 0\}$ et de type nœud dans le demi-espace $\{x \leq 0\}$ (pour la terminologie voir le paragraphe II-2.3). Pour cette raison, ce point singulier est appelé : (point de) *selle-nœud* (par analogie on appelle aussi selle-nœud le champ de dimension 1 : $X_0^1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$). Pour $\lambda > 0$, on n'a pas de point singulier et toutes les trajectoires sont orientées vers la droite. Pour $\lambda < 0$, on a deux points singuliers : un point de selle en $(x_\lambda^+, 0)$ est un nœud (hyperbolique) attracteur en $(x_\lambda^-, 0)$ dont le bassin d'attraction est le demi-espace $\{x < x_\lambda^+\}$: le point de selle-nœud bifurque donc pour $\lambda < 0$ en un point de selle et un nœud attractant (figure 5.2).

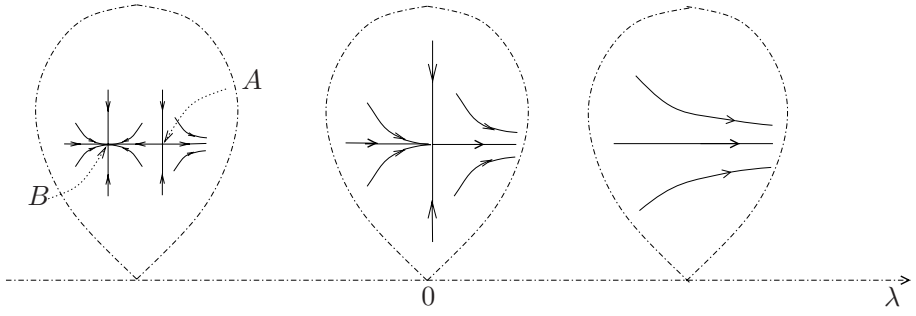


Figure 5.2. $A = (x_\lambda^+, 0)$, $B = (x_\lambda^-, 0)$.

Si le coefficient -1 de $y\frac{\partial}{\partial y}$ est remplacé par $+1$, on aura bifurcation, pour $\lambda < 0$, du point selle-nœud en une paire formée d'un point de selle et d'un nœud répulseur (source). Il n'y a plus d'attracteur pour aucune valeur du paramètre (ce qui rend la famille moins intéressante pour les applications).

Exemple 3

On considère maintenant la famille de champs de $\mathbb{R}$:

$$X_\lambda^{n-1}(x) = \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_{n-2-i} x^{n-2-i} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

avec pour paramètre $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. La fonction

$$P_\lambda^{n-1}(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_{n-2-i} x^{n-2-i}$$

est le polynôme général unitaire (ou famille polynomiale verselle) de degré n, dans le sens où tout polynôme unitaire de degré n se ramène à un polynôme P_λ^{n-1} à une translation en x près. Le cas $n = 1$ est un champ sans paramètre qui est linéaire hyperbolique. Le cas $n = 2$ a été décrit dans l'exemple 1. Dans le cas n général, l'étude des bifurcations dans la famille X_λ^{n-1} se ramène à l'étude classique des bifurcations des zéros de la famille polynomiale P_λ^{n-1} qui est le modèle de la *catastrophe élémentaire* de codimension $n-1$ et de dimension 1 (on trouvera dans [71] une introduction à la théorie des catastrophes et leur application à l'étude de l'évolution des formes. Pour plus de détails sur la théorie et les applications, on pourra aussi consulter [3, 28, 54]).

On peut déduire le type du champ X_λ^{n-1}, à conjugaison près, de la position du graphe de P_λ^{n-1} par rapport à l'axe des x. En effet, pour chaque λ, la donnée de l'ordre et du signe de la première dérivée non nulle en chaque zéro de P_λ^{n-1}, détermine le type du champ X_λ^{n-1}, à équivalence (et même à conjugaison près). Pour le voir, introduisons le discriminant $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de la famille P_λ^{n-1}, *sous-ensemble fermé dans l'espace des paramètres*, des valeurs λ telles que P_λ^{n-1} ait au moins un zéro non simple. Le discriminant est défini comme l'ensemble algébrique obtenu par élimination de x entre les équations

$$P_\lambda^{n-1}(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} P_\lambda^{n-1}(x) = 0.$$

L'ouvert dense $U^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Delta^{n-1}$ est formé des valeurs du paramètre pour lesquelles les racines de P_λ^{n-1} sont toutes simples. L'ouvert U^{n-1} a un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles correspondant à un nombre fixé de racines simples (remarquez que plusieurs composantes peuvent correspondre au même nombre de racines). Si les racines sont toutes simples, on a nécessairement que $\frac{\partial P_\lambda}{\partial x}(x_m) > 0$, si x_m est la racine de plus grande abscisse. Il en résulte que, dans chaque composante connexe de U^{n-1}, le portrait de phase du champ X_λ^{n-1} est constant et parfaitement déterminé.

Le type du champ X_λ^{n-1} ne peut donc changer que lorsqu'on fait franchir le discriminant à la valeur du paramètre λ. C'est pourquoi Δ^{n-1} est identifié à *l'ensemble (ou diagramme) de bifurcation* de la famille X_λ. Comme tout ensemble algébrique, Δ^{n-1} est union d'un ensemble fini de strates Σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$. La strate Σ_i est une sous-variété (non nécessairement connexe) de codimension i qui peut être définie par le nombre et la nature des zéros de P_λ (nombre et nature étant constants le long de la strate). Par exemple, $\Sigma_{n-1} = \{0\}$ et 0 est l'unique valeur du paramètre où P_λ a un zéro (unique) d'ordre n. Par exemple encore, la strate Σ_1 est formée des valeurs de λ pour lesquelles P_λ a un seul zéro non simple et qui est double. Lorsqu'on franchit Σ_1 transversalement, une paire de zéros simples

est créée. En choisissant une sous-famille transverse à Σ_1, on retrouve *localement au voisinage du zéro double* la bifurcation décrite dans l'exemple 1 (mais avec une écriture différente). Cette observation mérite d'être soulignée car on a ici une caractéristique générale de la théorie des bifurcations : dans l'étude d'une famille à l paramètres, on retrouve en général comme sous-familles locales les familles à moins de l paramètres. On peut dire que l'étude des bifurcations à l paramètres récapitule et organise les différentes bifurcations à moins de l paramètres.

Une autre observation qui suit de cet exemple est que l'étude des bifurcations présuppose la connaissance de la théorie des ensembles algébriques (et aussi plus généralement des ensembles semi-algébriques, analytiques, sous-analytiques). Dans cet exemple, on a affaire à l'ensemble algébrique discriminant de la théorie des catastrophes élémentaires. Cet ensemble algébrique a été étudié par H. Whitney dans le cas à 2 paramètres et par R. Thom en général (voir [71] et [3] par exemple). Une étude systématique des ensembles algébriques réels a été faite par Lojaciewicz (voir [39]).

Comme il est dit plus haut, chaque ensemble algébrique réel $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ de codimension 1 possède une stratification canonique en sous-variétés (les strates) $\Sigma_i,\ i = 1, \ldots, p$ avec Σ_i de codimension i. Une propriété élémentaire de cette stratification est que, pour tout $i \geq 1,\ \bar{\Sigma}_i \subset \cup_{j \geq i} \Sigma_j$ (où, notation usuelle, $\bar{\Sigma}_i$ est l'adhérence de Σ_i). Une propriété plus profonde est que la stratification vérifie les *conditions (a) et (b) de Whitney*. Ces conditions, que nous ne rappellerons pas ici, spécifient des propriétés de régularité entre l'incidence des différentes strates et permettent d'établir le fameux *théorème d'isotopie de Thom* (voir [39] pour la définition des conditions de Whitney et des détails sur le théorème d'isotopie). Une autre propriété générale, établie par Lojaciewicz est que tout ensemble algébrique réel Δ a localement une structure conique : pour tout $m \in \Delta$ et si S_ε est une sphère de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit centrée en m, la sphère S_ε est transverse aux différentes strates adhèrentes à m et $\Delta \cap D_\varepsilon$ est un cône topologique sur $\Delta \cap S_\varepsilon$ (D_ε est la boule de rayon ε dont le bord est la sphère S_ε).

Nous allons maintenant passer en revue les familles X_λ^{n-1} pour les petites valeurs de n. Nous adoptons la terminologie de la théorie des catastrophes : pli, fronce, queue d'aronde... (évoquant soit la projection de la surface $\{P_\lambda^{n-1} = 0\}$ sur l'espace des paramètres, soit la forme du discriminant dans l'espace du paramètre). Comme il a été observé plus haut, on retrouve, transversalement aux strates d'un diagramme de bifurcation donné Δ^{n-1}, les bifurcations décrites pour les valeurs de n plus petites et l'on nommera les strates en conséquence.

1. **Famille Pli ; n = 2.** Cette famille est décrite dans l'exemple 1. Le diagramme de bifurcation se résume à $\{0\} \subset \mathbb{R}$ (figure 5.1).

2. Famille Fronce ; n = 3. On a $P^2_\lambda = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_0$. L'équation du diagramme (discriminant de P^2_λ) est donnée par :

$$\Delta^2 = \{27\lambda_0^2 + 4\lambda_1^3 = 0\}.$$

On peut aussi paramétrer Δ^2 par la position x du zéro non simple :

$$\Delta^2 \ : \lambda_0 = 2x^3, \quad \lambda_1 = -3x^2.$$

Le diagramme de bifurcation est une courbe avec un point singulier de rebroussement en $(0,0)$, que l'on appelle un *cusp* (qui est aussi le nom parfois donné à la bifurcation elle-même). Ce diagramme dans le plan (λ_0, λ_1) est formé de deux strates de codimension 1 en dehors de $(0,0)$ qui sont des lignes de plis (sur lesquelles on a un zéro double et un zéro simple) et du point $(0,0)$, le point cusp proprement dit, correspondant à un zéro triple. L'ensemble $U^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta^2$ a deux composantes connexes : l'intérieur U^2_3 du cusp dans lequel P^2_λ a trois zéros simples et son extérieur U^2_1 dans lequel P^2_λ a un zéro simple. Pour se représenter les bifurcations des zéros en fonction de λ, on a intérêt à dessiner la surface $\{P_\lambda(x) = 0\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x, \lambda_0, \lambda_1)$. On obtient l'image d'une fronce (qui se projette sur le cusp dans l'espace du paramètre), d'où le nom donné à la bifurcation (figure 5.3 sur laquelle on a aussi représenté les différents portraits de phase).

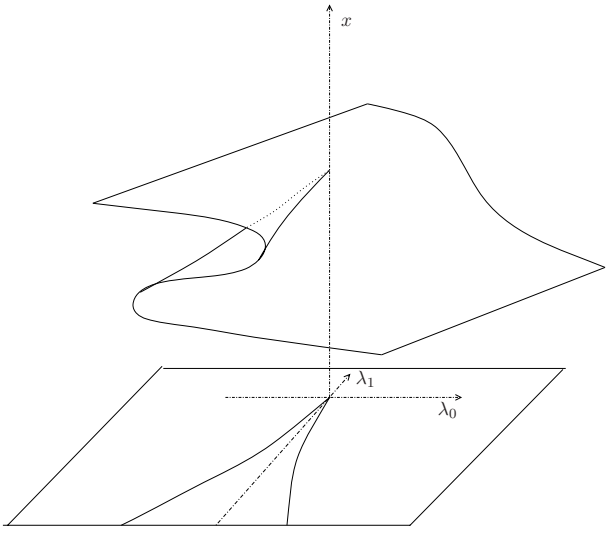


Figure 5.3

3. Famille Queue d'aronde ; n = 4.

On a $P^3_\lambda(x) = x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0$. Comme il n'est évidemment pas question de dessiner l'hypersurface $\{P^3_\lambda(x) = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$, on se contentera de représenter le diagramme de bifurcation Δ^3 dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des paramètres. Il est facile de calculer une représentation paramétrique de ce diagramme en calculant λ_0 et λ_1 en fonction de λ_2 et de x, position d'une racine non simple :

$$\lambda_0 = \lambda_2 x^2 + 3x^4, \quad \lambda_1 = -2\lambda_2 x - 4x^3.$$

Pour chaque λ_2 fixé, ces équations donnent la courbe d'intersection $\Delta^3_{\lambda_2}$ de Δ^3 avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{\lambda_2\}$, paramétrée par $x \in \mathbb{R}$. Remarquez que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des λ_0. Les points singuliers sur $\Delta^3_{\lambda_2}$ correspondent aux valeurs du paramètre x vérifiant $\lambda_2 + 6x^2 = 0$. Il n'y a donc pas de points singuliers si $\lambda_2 > 0$. Dans ce cas, l'application $x \mapsto \lambda_1 = -2\lambda_2 x - 4x^3$ est un difféomorphisme que l'on peut inverser et il en résulte que $\Delta^3_{\lambda_2}$ est le graphe d'une fonction (symétrique) de λ_0 en fonction de λ_1. Cette fonction s'annule quadratiquement en $\lambda_1 = 0$. Tous les points de $\Delta^3_{\lambda_2}$ pour $\lambda_2 > 0$ sont de type pli (correspondant à un seul point double pour P_λ). Pour $\lambda_2 = 0$, la courbe $\Delta^3_{\lambda_2}$ est encore graphe d'une fonction de λ_0 en fonction de λ_1, avec un point de non-différentiabilité en $\lambda_1 = 0$ (ce point, situé en $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ correspond à une unique racine quadruple pour P_λ). Pour $\lambda_2 < 0$, on a deux points singuliers sur la courbe $\Delta^3_{\lambda_2}$ pour les valeurs $x = \pm\sqrt{|\lambda_2|/6}$. Une étude plus poussée permet de constater que ces points sont des points de rebroussement (des cusps). Ces deux points sont des bifurcations type fronce (correspondant à un point triple pour P_λ). Leur complémentaire sur $\Delta^3_{\lambda_2}$ est l'union de trois arcs de type pli. On peut aussi vérifier que pour $\lambda_2 < 0$, la courbe $\Delta^3_{\lambda_2}$ a un unique point de self-intersection, situé par raison de symétrie sur l'axe $\{\lambda_1 = 0\}$. On calcule facilement que ce point de self-intersection a pour équation : $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{4}\lambda_2^2$ (ce point correspond à l'existence d'une paire de points doubles pour P_λ). Les courbes $\Delta^3_{\lambda_2}$ pour les différentes valeurs de λ_2 forment une sorte de « tomographie » du diagramme de bifurcation Δ^3. On a dessiné ce diagramme de bifurcation dans la figure 5.4. La désignation de *queue d'aronde* provient de la forme particulière de la section $\Delta^3_{\lambda_2}$ pour $\lambda_2 < 0$.

On peut voir que Δ^3 a quatre strates (de pli) de codimension 1 (des surfaces), trois strates de codimension 2 : deux lignes de cups (ou de fronces) et une ligne de self-intersection, et enfin une strate de codimension 3, l'origine $(0, 0, 0)$, qui est appelé le point de bifurcation de type queue d'aronde.

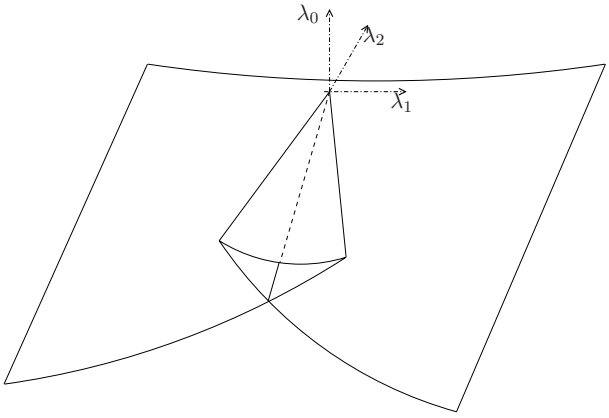


Figure 5.4. Queue d'aronde.

Il est facile de vérifier sur cet exemple que Δ^3 a une structure conique en chaque point. Cela est particulièrement facile à vérifier à l'origine en utilisant un argument de quasi-homogénéité sur l'équation de Δ^3.

En rajoutant la composante $\pm y\frac{\partial}{\partial y}$ à la famille X_λ^{n-1}, on obtient une famille $Z_\lambda^{n-1,\pm}$ en dimension 2, généralisant le cas $n = 2$ décrit dans l'exemple 2. La description des bifurcations dans la famille $Z_\lambda^{n-1,\pm}$ suit directement de celle faite plus haut pour X_λ^{n-1}. Dans le cas « $-$ », par exemple, il suffit de remplacer les points attractants de X_λ^{n-1} par des nœuds attractants et les points répulseurs de X_λ^{n-1} par des points de selle.

Exemple 4

On considère la famille suivante à 1 paramètre, d'équation différentielle de $\mathbb{R}^2$:

$$H_\lambda^\pm : \begin{cases} \dot{x} = -y \pm \big(\lambda + (x^2+y^2)\big)x \\ \dot{y} = x \pm \big(\lambda + (x^2+y^2)\big)y \end{cases} .$$

Cette famille est le modèle de la bifurcation de Hopf dont on reparlera plus loin. Pour $\lambda = 0$, la partie linéaire est un champ de rotation et de plus la famille est clairement invariante par toutes les rotations de $\mathbb{R}^2$. Aussi est-il naturel de l'écrire en coordonnées polaires (ρ, θ) avec $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$:

$$H_\lambda^\pm : \begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\rho} = \pm\rho(\lambda + \rho^2) \end{cases} .$$

On obtient ainsi un champ défini dans les coordonnées polaires :

$$(\theta, \rho) \in S^1 \times [0, +\infty) \quad \text{avec} \quad S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

On peut intégrer les trajectoires en éliminant le temps et en prenant θ comme variable d'intégration. Les trajectoires sont alors les graphes des fonctions $\rho(\theta)$ solution de l'équation différentielle de dimension 1 :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\rho(\lambda + \rho^2). \tag{5.1}$$

Le champ $H_\lambda^\pm$ est clairement transverse aux demi-droites issues de l'origine. En particulier, une application de retour $P_\lambda^\pm(x)$ (en fait une famille d'applications dépendant de λ) est définie sur le demi-axe horizontal $Ox^+ = [0, +\infty)$, paramétré par $x \geq 0$. Cette application peut être obtenue en intégrant l'équation (5.1), à partir de la condition initiale $\rho = x$, entre les angles $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$. Cette intégration n'est pas vraiment utile pour déterminer le type du champ $H_\lambda^\pm$ à équivalence près. En effet les points fixes de $P_\lambda^\pm$ sont en correspondance bi-univoque avec les zéros de (5.1). Un point fixe est attractif si la dérivée de la fonction $\rho(\lambda \pm \rho^2)$ en ce point est négative et inversement. Évidemment, à chaque point fixe x de $P_\lambda^\pm$ et donc à chaque zéro de (5.1) correspond une orbite périodique de $H_\lambda^\pm$ (le cercle de rayon x centré à l'origine), qui est attractante ou répulsive selon le signe de la dérivée de $\pm\rho(\lambda + \rho^2)$ en ce point x.

Considérons par exemple le cas « $-$ » de (5.1). Pour tout λ, l'origine $0 \in \mathbb{R}$ est un zéro de (5.1). Cela correspond simplement au fait que l'origine de $\mathbb{R}^2$ est un zéro du champ H_λ^-. Il n'y a pas d'autre zéro de (5.1) si $\lambda \geq 0$, et l'origine de $\mathbb{R}^2$ est un foyer hyperbolique attracteur dont le bassin est le plan tout entier (foyer hyperbolique si $\lambda > 0$; on trouvera la définition des foyers dans la section 7).

Par contre, si $\lambda < 0$ l'origine $\{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est un foyer hyperbolique instable. D'autre part, on a dans ce cas un deuxième zéro de (5.1) en $x_\lambda = \sqrt{|\lambda|}$. La dérivée en ce point de la fonction $-\rho(\lambda + \rho^2)$ est égale à $-\lambda - 3x_\lambda^2 = |\lambda| - 3x_\lambda^2 = -2|\lambda| < 0$. En conséquence, pour $\lambda < 0$, le cercle $\{\rho = \sqrt{|\lambda|}\}$ est orbite périodique hyperbolique stable (attractrice) du champ H_λ^-. Le bassin d'attraction de cette orbite est égale à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Enfin pour $\lambda = 0$, l'origine de $\mathbb{R}^2$ est un foyer non hyperbolique attractant dont le bassin est le plan tout entier : chaque trajectoire issue d'un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tend vers l'origine en prenant la forme d'une spirale autour d'elle.

On a donc un seul point de bifurcation $\lambda = 0$. Pour $\lambda \geq 0$, l'origine est un attracteur global. Pour $\lambda < 0$, on a une orbite périodique attractante. La bifurcation se résume au scénario suivant : un point d'équilibre stable qui existe pour tout $\lambda \geq 0$, se transforme pour $\lambda < 0$ en un équilibre oscillant stable. L'amplitude de cette oscillation croît comme $\sqrt{|\lambda|}$ (figure 5.5).

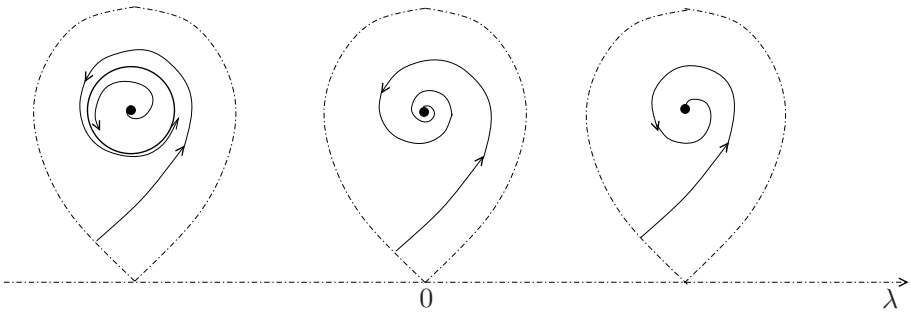


Figure 5.5. Bifurcation de Hopf H_λ^- (cas sur-critique).

Cette famille H_λ^- est appelée : (modèle polynomial de) la *bifurcation de Hopf sur-critique.*

Le cas « + » de (5.1) se traite exactement de la même façon, mais le scénario décrit est très différent. Une orbite périodique de rayon $\sqrt{|\lambda|}$ apparaît aussi pour $\lambda < 0$, mais elle est maintenant instable. Le scénario de la bifurcation est le suivant : pour $\lambda < 0$, l'origine est un foyer hyperbolique stable et son bassin d'attraction est le disque de rayon $\sqrt{|\lambda|}$, centré à l'origine. Ce disque disparaît donc lorsque le paramètre atteint la valeur $\lambda = 0$ et aucun attracteur ne subsiste pour $\lambda > 0$. Cette famille H_λ^+ est appelée : (modèle polynomial de) la *bifurcation de Hopf sous-critique.*

Les exemples précédents sont des exemples de dynamiques continues définies par des flots de champs de vecteurs. Nous allons maintenant donner des exemples de dynamiques discrètes.

Exemple 5

Un difféomorphisme f peut être itéré aussi bien pour des puissances n positives que négatives (cela équivaut à itérer l'inverse f^{-1} pour des puissances positives). Voici un exemple de famille de difféomorphismes de $\mathbb{R}$, définie au voisinage de l'origine.

Soit P_λ^{n-1} le polynôme universel introduit dans l'exemple 3. Par analogie avec l'exemple 3, on peut introduire la famille d'applications polynomiales $f_\lambda^{n-1}(x) = x + P_\lambda^{n-1}(x)$. Les zéros de P_λ correspondent aux points fixes de f_λ^{n-1}. Remarquez que f_λ^{n-1} n'est qu'un difféomorphisme local. En effet on doit avoir $|x|$ et $||\lambda||$ assez petits pour éviter les zéros de $\frac{\partial}{\partial x} f_\lambda^{n-1}$; on écrit : $x \sim 0$ et $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Avec cette restriction, la description des bifurcations dans la famille f_λ^{n-1} est complètement similaire à celle faite dans l'exemple 3. Nous n'insisterons pas davantage.

Exemple 6

La modélisation par des *applications non inversibles* est également intéressante dans les applications (voir l'application unimodale ou logistique décrite dans le chapitre d'introduction). Pour une application non inversible en dimension 1, on peut avoir des valeurs de x pour lesquelles la dérivée est négative. Voici un modèle polynomial de la bifurcation la plus simple, au voisinage d'un point non hyperbolique où la dérivée a la valeur -1.

On considère la famille $F_\lambda(x) = -(1+\lambda)x + x^3$, avec $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}$ et $x \sim 0 \in \mathbb{R}$ (on est intéressé par les bifurcations locales pour x et λ près de 0). L'origine est un point fixe de F_λ pour toute valeur de λ, qui est non hyperbolique pour $\lambda = 0$ (car $F_0'(0) = -1$ et donc de module égal à 1, voir la définition 3.2), hyperbolique instable si $\lambda > 0$ et hyperbolique stable si $\lambda < 0$. Clairement F_λ n'a pas d'autres points fixes dans tout un voisinage de l'origine. Cherchons les points fixes de l'application carrée $F_\lambda \circ F_\lambda = F_\lambda^{\circ 2}$ au voisinage de l'origine. On a :

$$F_\lambda^{\circ 2}(x) = (1+\lambda)^2 x - (1+\lambda)(2+2\lambda+\lambda^2)x^3 + O(x^4).$$

L'équation des points fixes de $F_\lambda^{\circ 2}$ est donc :

$$x\big((2\lambda+\lambda^2) - (1+\lambda)(2+2\lambda+\lambda^2)x^2 + O(x^3)\big) = 0.$$

On voit que, outre $x = 0$, l'application $F_\lambda^{\circ 2}$ a deux points fixes de part et d'autre de l'origine si $\lambda > 0$, à une distance de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$ de l'origine. Comme ces points ne sont pas points fixes de F_λ, ils forment une orbite 2-périodique de cette application. Il est facile de vérifier que cette orbite est hyperbolique et stable. Le scénario de la bifurcation locale au voisinage de l'origine et lorsque $\lambda \sim 0$ est donc le suivant : l'origine est un point attracteur hyperbolique pour $\lambda < 0$. Ce point est encore attracteur mais non-hyperbolique pour $\lambda = 0$. Quand λ croît à partir de 0, l'origine devient instable (hyperbolique) et il se crée une orbite 2-périodique stable hyperbolique qui bifurque de l'origine et croît avec un ordre de $\sqrt{\lambda}$. L'attracteur point fixe est donc transformé en une orbite attractrice 2-périodique (figure 5.6). C'est pourquoi on appelle la famille F_λ : modèle polynomial pour la bifurcation de *doublement de période*. Remarquez l'analogie entre cette bifurcation et la bifurcation de Hopf sous-critique.

Localement, au voisinage de l'origine, la famille F_λ est une famille de difféomorphisme renversant l'orientation. On peut étendre cette famille en une famille locale $G_\lambda : (x,y) \mapsto (X,Y)$ de difféomorphismes en dimension 2, considérée pour $(x,y) \sim (0,0)$ et $\lambda \sim 0$:

$$G_\lambda \ : \begin{cases} X = f_\lambda(x) = -(1+\lambda)x + x^3 \\ Y = -\frac{1}{2}y \end{cases} .$$

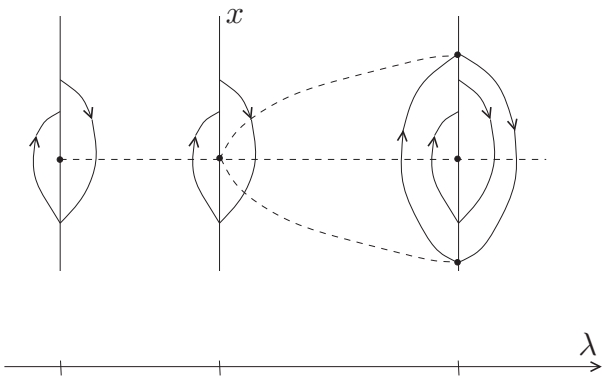


Figure 5.6. Doublement de période.

Les deux valeurs propres à l'origine de $\mathbb{R}^2$ étant négatives pour $\lambda \sim 0$, l'application G_λ est localement un difféomorphisme *préservant l'orientation.* Ce difféomorphisme laisse invariant l'axe des x sur lequel il se restreint en F_λ et est normalement contractant à cet axe. On a donc, pour $\lambda < 0$, un point attracteur hyperbolique à l'origine qui bifurque en une orbite 2-périodique, attractante hyperbolique pour λ croissant à partir de 0. L'origine devient un point de selle pour $\lambda > 0$.

En utilisant les idées du chapitre II-6, on peut suspendre la famille G_λ en une famille de champs de vecteurs X_λ en dimension 3, dans laquelle une orbite hyperbolique stable γ_λ, que l'on peut supposer fixe, devient instable en émettant une orbite périodique stable de période double (c'est-à-dire qui fait deux fois le tour de γ_λ (figure 5.7). Remarquez que la bifurcation se produit sur un ruban de Möbius : la suspension d'un voisinage de 0 sur l'axe des x.

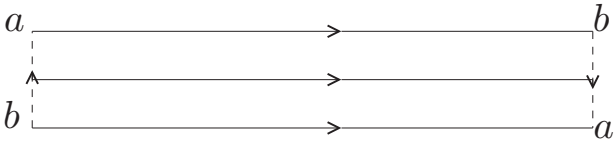


Figure 5.7. Doublement de période sur un ruban de Möbius.

5.3. Déploiements versels pour les singularités

Dans ce paragraphe, on va préciser quelques notions relatives aux familles de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une telle famille s'écrit :

$$X_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x,\mu)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec les } X_i \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty.$$

Dans le chapitre 2, on a introduit la notion de germe en un point d'une variété M pour un objet quelconque de la topologie différentielle : champ de vecteurs, applications, sous-ensemble de la variété M. Avec la même définition, on considérera aussi, plus généralement, les germes le long d'une partie $K \subset M$. Comme pour le cas où K est réduit à un point, le germe sera une classe d'équivalence parmi les représentants de l'objet considéré sur un système fondamental de voisinages de K dans M.

Dans la suite de cette section, nous allons nous concentrer sur les champs de vecteurs et leurs familles. Les notions que nous allons introduire sont valables de façon tout à fait similaire pour les difféomorphismes ou les applications.

Si X est un champ de vecteurs sur M et $K \subset M$, on désignera par (X, K) le germe de X le long de K. Parler de ce germe est équivalent à parler de X dans un voisinage *arbitraire* U de K (un représentant du germe). La notion de germe est donc similaire à celle d'*objet local*. Dans le cas particulier d'un point x_0, un germe (X, x_0) de champ de vecteurs, tel que $X(x_0) = 0$, est communément appelé : *singularité de champ de vecteurs*.

On va ici considérer les germes de familles de champs de vecteurs X_μ sur M, définis au voisinage d'un compact invariant K de X_{μ_0} et de la valeur $\mu_0 \in \mathbb{R}^k$, l'espace des paramètres. Un germe de famille de champ de vecteurs est appelé *déploiement de champs de vecteurs*. Un tel déploiement au voisinage de K et de la valeur μ_0 du paramètre sera noté : $\big(X_\mu, (K, \mu_0)\big)$. Si K est un point x_0, l'invariance implique que $X_{\mu_0}(x_0) = 0$ et l'on a un déploiement de la singularité (X_{μ_0}, x_0) qui sera noté $\big(X_\mu, (x_0, \mu_0)\big)$. Dans ce cas, on peut alors supposer que M est un espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Si $K = M$, on notera le déploiement en μ_0 simplement par (X_μ, μ_0). Parler d'un déploiement X_μ le long de K revient à parler d'une famille locale, représentante du déploiement et définie sur un voisinage *arbitraire* $U \times \mathcal{V} \subset M \times \mathbb{R}^k$ de $K \times \{\mu_0\}$. Aussi on utilisera souvent, de façon un peu abusive, le terme de *famille locale au voisinage de* $K \times \{\mu_0\}$ (ou bien le long de K, et pour la valeur μ_0 du paramètre) pour parler du déploiement $\big(X_\mu, (K, \mu_0)\big)$.

Définition 5.1. Soit deux familles X_μ et X'_μ de champs de vecteurs sur le même espace de paramètre $\mathbb{R}^k$. On dit que ces deux familles sont $\mathcal{C}^0$-équivalentes s'il existe un *homéomorphisme* Φ de $\mathbb{R}^k$ tel que, pour chaque μ de $\mathbb{R}^k$, le champ X_μ est équivalent au champ $X'_{\Phi(\mu)}$, au sens de la définition 1.3. On dira que l'équivalence est au-dessus de Φ.

Si Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$, $r = 1, \ldots, +\infty$, on dira que l'on a une $\mathcal{C}^r$-équivalence.

Remarque 5.1.

1. Dans la définition 5.1, on peut remplacer la relation d'équivalence par la relation de conjugaison au sens de la définition 1.2. On parlera alors de $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^r$-conjugaison.

2. Dans ces définitions, on ne demande pas que l'homéomorphisme d'équivalence ou de conjugaison dépende continûment du paramètre. Si les équivalences sont données par l'intermédiaire d'une famille d'homéomorphismes h_μ, dépendant continûment de μ, on dira que l'on a une $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^0)$-équivalence (ou conjugaison). Si Φ est de classe $\mathcal{C}^r$ et que l'on ait une famille de difféomorphismes $h_\mu(x)$ telle que $(x, \mu) \mapsto h_\mu(x)$ soit de classe $\mathcal{C}^s$, on dira que l'on a une $(\mathcal{C}^s, \mathcal{C}^r)$-*équivalence* (ou conjugaison), pour $0 \leq r, s \leq +\infty$. Remarquez que l'équivalence (ou conjugaison) de deux familles *au-dessus de l'identité* (c'est-à-dire au-dessus de l'homéomorphisme $\Phi = \mathrm{Id}$ dans la définition 5.1) est un cas particulier de la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence (ou conjugaison).

3. Ces notions passent aux déploiements. On suppose que X_λ et X'_λ sont deux familles représentatives de déploiements, définies sur des voisinages $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ de $K \times \{\lambda_0\}$ et de $K' \times \{\lambda'_0\}$ respectivement, et que Φ envoie $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, avec $\phi(\lambda_0) = \lambda'_0$, où h_λ est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ tel que $h_{\lambda_0}(K) = K'$. On dira que les déploiements $\big(X_\lambda, (K, \lambda_0)\big)$ et $\big(X'_\lambda, (K', \lambda'_0)\big)$ sont $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^r, (\mathcal{C}^r, \mathcal{C}^s)$-équivalents (ou conjugués) si la propriété est vraie pour des familles représentatives.

La notation $(\mathbb{R}^l, \mu_0)$ qui suit, signifie que l'on considère un voisinage arbitraire de μ_0 avec $\mu_0 \in \mathbb{R}^l$ (c'est-à-dire le germe de l'espace $\mathbb{R}^l$ en μ_0).

Définition 5.2. Si $\varphi : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^k$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ avec $0 \leq r \leq \infty$, et X_λ de classe $\mathcal{C}^r$ est une famille de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^k$, on appelle *famille induite par* φ la famille $Y_\mu = X_{\varphi(\mu)}$ de paramètre $\mu \in \mathbb{R}^l$. La famille induite Y_μ est de classe $\mathcal{C}^r$.

On peut évidemment induire un déploiement $\big(X_\lambda, (K, \lambda_0)\big)$, $\lambda \in (\mathbb{R}^k, \lambda_0)$ par un germe d'application $(\varphi, \mu_0) : (\mathbb{R}^l, \mu_0) \mapsto (\mathbb{R}^k, \lambda_0)$, avec $\lambda_0 = \varphi(\mu_0)$, de classe $\mathcal{C}^r$ avec $0 \leq r \leq \infty$. Le déploiement induit est $\big(Y_\mu, (K, \mu_0)\big)$ avec $Y_\mu = X_{\varphi(\mu)}$, de paramètre $\mu \in (\mathbb{R}^l, \mu_0)$. Ce déploiement est de classe $\mathcal{C}^r$.

Pour simplifier, nous allons nous limiter dans la suite aux déploiements de singularités.

Définition 5.3. Un déploiement $\big(X_\lambda, (x_0, \lambda_0)\big)$ d'une singularité (X_{λ_0}, x_0) est appelé déploiement $\mathcal{C}^r$-versel de (X_{λ_0}, x_0), si tout autre déploiement de (X_{λ_0}, x_0) est équivalent au-dessus de l'identité à un déploiement induit par une application φ de classe $\mathcal{C}^r$, et que X_λ a un nombre minimum de paramètres.

On dira que le déploiement est un déploiement $(\mathcal{C}^s, \mathcal{C}^r)$-versel de (X_{λ_0}, x_0), si l'application φ est de classe $\mathcal{C}^r$ et si l'application $h_\mu(x)$ définissant l'équivalence est de classe $\mathcal{C}^s$.

Un déploiement versel d'une singularité (X_{λ_0}, x_0), s'il existe, ne décrit pas seulement toutes les singularités que l'on peut obtenir par perturbation de cette singularité, mais aussi toutes les transitions possibles entre ces singularités, et précise comment ces bifurcations s'organisent de façon globale autour de la singularité (X_{λ_0}, x_0) qui, selon les termes de Thom, joue le rôle de *centre organisateur* des bifurcations locales.

Remarque 5.2. Il n'est en général pas possible d'obtenir des équivalences dépendant continûment (et *a fortiori* différentiablement !) du paramètre lorsque l'on veut établir qu'un déploiement est versel. Aussi la notion de $(\mathcal{C}^s, \mathcal{C}^r)$-équivalence, en particulier pour $r, s = +\infty$, ne peut être utilisée *a priori* que dans les étapes préliminaires des études de bifurcation. Par contre, on cherchera à contrôler la structure différentiable du diagramme de bifurcation d'un déploiement versel (en particulier pour les applications). Pour cette raison, on essayera en général d'obtenir des déploiements $\mathcal{C}^\infty$-versels.

En particulier, nous verrons que la bifurcation de Hopf décrite dans l'exemple 4 de la section 2 est un déploiement $\mathcal{C}^\infty$-versel. On voit que le phénomène global décrit dans cette bifurcation est la bifurcation de l'orbite périodique à partir de la singularité (le foyer à l'origine). Sur cet exemple, on voit clairement la différence entre le germe de la famille (le déploiement) et la famille des germes à l'origine dans la famille : de ce second point de vue, l'orbite périodique serait invisible !

On peut aussi remarquer que les déploiements versels peuvent distinguer qualitativement des singularités qui sont équivalentes. Par exemple $\frac{\partial}{\partial\theta} - \rho\frac{\partial}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta} - \rho^3\frac{\partial}{\partial\rho}$ sont des singularités équivalentes, comme il suit de la proposition 3.1. La première singularité est hyperbolique et ne peut être approchée par des orbites périodiques. Comme elle est structurellement stable d'après le théorème 3.9 de Hartmann-Grobman, son déploiement versel est la famille sans paramètre constituée par la singularité $\frac{\partial}{\partial\theta} - \rho\frac{\partial}{\partial\rho}$ elle-même. Par contre, on a vu que la seconde singularité bifurque en une orbite périodique. Ainsi, le déploiement versel d'une singularité

peut faire apparaître des propriétés qualitatives latentes, non visibles dans la singularité elle-même. *Le but essentiel de ce chapitre est de montrer comment obtenir certains déploiements versels.*

Définition 5.4. La *codimension* d'une singularité est le nombre de paramètres pour n'importe quel déploiement versel de la singularité (clairement, ce nombre est le même pour toutes les déformations verselles et est donc bien défini). *La codimension d'une singularité n'est donc définie que si cette singularité a des déploiements versels.* Pour étendre la définition, on dit que la singularité est de codimension infinie si elle ne possède pas de déploiement versel.

Remarque 5.3. Dans la définition 5.4 le terme « singularité » désigne une singularité de champs de vecteurs au sens introduit au début de cette section, c'est-à-dire un germe (X, x_0) de champs de vecteurs tel que $X(x_0) = 0$. Ce terme « singularité » a déjà été introduit dans la définition 2.8 avec un tout autre sens. En effet, dans cette définition, le terme « singularité » définit une sous-variété particulière d'un espace de jets. Il y a évidemment une relation étroite entre ces deux définitions. Nous allons expliquer cette relation dans le cas des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^p$ (ce qui est suffisant pour traiter des déploiements de champs de vecteurs définis par des familles de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^p$). Des considérations tout à fait similaires pourraient être formulées pour les déploiements de difféomorphismes.

Désignons par V_n^p l'espace des champs de vecteurs polynomiaux de degré n sur $\mathbb{R}^p$. Rappelons que le n-jet en x d'un champ de vecteurs X de classe $\mathcal{C}^\infty$ est égal à $j^nX(x) = (x, T^nX(x)) \in \mathbb{R}^p \times V_n^p$ où $T^nX(x)$ est le polynôme de Taylor de degré n de X en x. L'espace fibré j^nV^p des n-jets de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ est le produit $\mathbb{R}^p \times V_n^p$ et l'application n-jet : $x \mapsto j^nX(x)$ est une section de cet espace fibré.

Considérons maintenant une sous-variété $S \subset V_n^p$ qui soit invariante par l'action sur les n-jets de champs des difféomorphismes de $\mathbb{R}^p$ fixant 0. Le produit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^p \times S \subset j^nV^p$ est une sous-variété de j^nV^p qui est une singularité au sens de la définition 2.8 car $\mathcal{S}$ est invariante par l'action, dans les n-jets de champs, des relevés des difféomorphimes locaux de $\mathbb{R}^p$ (c'est-à-dire définis sur les ouverts de $\mathbb{R}^p$; l'ensemble de ces difféomorphimes locaux est le pseudo-groupe structural de l'espace fibré).

Si $(X, 0)$ est un germe en 0 de champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ (c'est-à-dire une singularité de champs au sens de la définition 5.4), on dit que cette singularité a *le type défini par* S (ou bien par $\mathcal{S}$) si $j^nX(0) \in \{0\} \times S$: *la « singularité » $\mathcal{S}$ définit donc un « type de singularité » pour les germes dont le n-jet appartient à $\mathcal{S}$*. Tous les types de singularités considérés dans ce chapitre sont définis par ce procédé.

Comme illustration, dans l'exemple 3 ci-dessus on considère la famille

$$X_\lambda^{n-1}(x) = P_\lambda^{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

avec

$$P_\lambda^{n-1}(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_{n-2-i} x^{n-2-i}.$$

Soit V_n^1 l'espace des champs polynômiaux de degré n : $\sum_0^n a_i x^i \frac{\partial}{\partial x}$. Les équations $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $a_n \neq 0$ définissent une sous-variété S de codimension n (et de dimension 1) de V_n^1, union de deux demi-droites. On a $j^n X_0^{n-1}(0) \in \{0\} \times S$. La sous-variété $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times S$ est la singularité selle-nœud de codimension n (au sens de la définition 2.8) et, de façon équivalente, on dit que la singularité (le germe) $(X_0^{n-1}, 0)$ est de type selle-nœud de codimension n. Nous décrirons en détail ces singularités de type selle-nœud sur $\mathbb{R}$ et leurs déploiements versels dans la section 5.5.1.

Nous parlerons un peu plus loin, dans le paragraphe intitulé *digression sur versalité et transversalité*, de la relation qui existe entre la notion de codimension de la sous-variété « singularité » $\mathcal{S}$ définie dans la définition 2.2.8 et la notion de codimension d'une singularité « germe », telle qu'elle est définie dans la définition 5.4.

La notion de codimension définie dans la définition 5.4 dépend évidemment de la relation d'équivalence utilisée entre déploiements. Comme on l'a expliqué dans la remarque 5.2, sans mention expresse du contraire, on considérera la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence. En effet, on est intéressé par la structure $\mathcal{C}^\infty$ des diagrammes de bifurcation, structure qui a un grand intérêt pour les applications. Remarquez qu'une singularité est de codimension 0 si et seulement si elle est structurellement stable (c'est-à-dire qu'un représentant du germe est structurellement stable au sens du chapitre 4) : en effet, toute singularité suffisamment $\mathcal{C}^\infty$-proche d'une singularité X_0 structurellement stable lui est conjuguée ; tout déploiement de X_0 sera donc trivial et sera induit à équivalence près par X_0, vu comme déploiement à 0 paramètre !

Définition 5.5. Pour une famille X_λ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^k$, l'*ensemble (ou diagramme) de bifurcation* $\Sigma \in \mathbb{R}^k$ est défini comme le complément dans $\mathbb{R}^k$ (ou dans un certain voisinage de $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$) des valeurs λ pour lesquelles X_λ est structurellement stable pour la relation d'équivalence.

Remarque 5.4. La notion de diagramme de bifurcation ne se « germifie » pas en général. En effet, il peut arriver qu'une singularité en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ait des déploiements versels pour des représentants locaux définis sur des voisinages $\mathcal{U}_l \times \mathcal{V}_l \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ de (x_0, λ_0) formant un système fondamental de voisinages de ce point et que les diagrammes de bifurcations $\Sigma_l \subset \mathcal{V}_l$ ne définissent pas un germe unique en $0 \in \mathbb{R}^k$. Cela peut arriver si, par exemple, une partie du diagramme Σ_l dépend du bord $\partial\mathcal{U}_l$ (on trouvera des exemples dans [25]). Dans ce cas, on travaillera avec une famille locale fixée plutôt qu'avec la notion de déploiement. En fait la notion de bifurcation n'est bien définie, *en général,* que pour les familles définies sur une variété tout entière et non pas pour des déploiements. Par contre, pour une telle famille définie globalement sur une variété, on peut « germifier » les notions dans l'espace des paramètres.

Digression sur versalité et transversalité

La façon la plus simple pour établir qu'un déploiement est versel est d'utiliser, lorsque cela est possible, un argument de transversalité, employant les notions introduites dans le chapitre 2 et en particulier la définition 2.8. Ce sera le cas pour les types de singularités que nous allons étudier dans la suite : type selle-nœud, type Hopf-Takens, type Bogdanov-Takens par exemple. On considère par exemple les déploiements de champs de vecteurs $(X_\mu, (0,0))$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ avec un paramètre $\mu \in (\mathbb{R}^k, 0)$ et on veut construire un déploiement versel pour une singularité de champs $(X, 0)$ d'un certain type $\mathcal{T}$. Pour ce faire, on suppose tout d'abord, comme dans la remarque 5.3, que le type de singularité $\mathcal{T}$ est donné par des conditions sur le jet $j^l X(0)$ pour un certain l. Plus précisement, soit V_l^n l'espace euclidien des champs de vecteurs polynomiaux de degré l de $\mathbb{R}^n$ (V^n désignera l'espace des germes de champs de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^n$). On suppose qu'il existe une sous-variété $S_\mathcal{T} \subset V_l^n$ telle que :

La singularité $(X, 0)$ est de type $\mathcal{T}$ si et seulement si $j^l X(0) \in \{0\} \times S_\mathcal{T}$.

On suppose que $\mathcal{S}_\mathcal{T} = \mathbb{R}^n \times S_\mathcal{T} \subset j^l V^n = \mathbb{R}^n \times V_l^n$, espace fibré des l-jets de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, est une singularité au sens de la définition 2.8 (voir remarque 5.3). Rappelons que la fibre $j^l V_x^n$ de $j^l V^n$ en x, formée des l-jets de champs de vecteurs en x, s'identifie à $\{x\} \times V_l^n$. Si X est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne son l-jet en x par $j^l X(x) \in j^l V_x^n$. L'application $x \mapsto j^l X(x)$ est le graphe de l'application polynôme de Taylor de degré l : $x \mapsto T^l X(x) \in V_l^n$ (autrement dit $j^l X$ est section du fibré trivial de fibre V_l^n et de base $\mathbb{R}^n$; voir chapitre 2).

On suppose que $S_\mathcal{T}$ est de codimension $k+n$ dans V_l^n (c'est aussi la codimension de $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ dans l'espace fibré $j^l V^n$). Soit $(X_\mu, (0,0))$ un déploiement en $0 \in \mathbb{R}^n$ avec un paramètre $\mu \in (\mathbb{R}^k, 0)$ de la singularité (germe) $X = (X_0, 0)$.

Alors, il est remarquable que chaque singularité de codimension finie au sens de la définition 5.4, considérée dans ce chapitre, est associée à une telle sous-variété $S_{\mathcal{T}}$ et le déploiement $(X_\mu, (0,0))$ est versel, si et seulement si l'application $(x,\mu) \mapsto j^l X_\mu(x) \in j^l V^n$ est transverse en $(0,0)$ à $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \mathbb{R}^n \times S_{\mathcal{T}}$ (on désigne par $j^l X_\mu$ le l-jet du champ de vecteur X_μ pour μ fixé).

Rien ne dit que tous les déploiements versels puissent être obtenus de cette façon.

Remarque 5.5. Rappelons que l'application $(x,\mu) \mapsto j^l X_\mu(x) \in j^l V^n$ est le graphe de l'application $(x,\mu) \mapsto T^l X_\mu(x) \in V_l^n$. Comme $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \mathbb{R}^n \times S_{\mathcal{T}}$, la transversalité à $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ de l'application $(x,\mu) \mapsto j^l X_\mu(x)$ est équivalente à la transversalité à $S_{\mathcal{T}}$ de l'application $(x,\mu) \mapsto T^l X_\mu(x) \in j^l V^n$.

Notons qu'il n'y a pas de relation évidente en général entre les nombres l et k. La codimension de la singularité $(X,0)$, au sens de la définition 5.4, est égale à k (le nombre de paramètres). On voit qu'un déploiement versel est construit par transversalité d'une application jet : $(x,\mu) \mapsto j^l X_\mu(x)$ à une sous-variété de codimension $k+n$. La différence entre ces deux codimensions tient au fait que l'application jet est à considérer sur l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, de coordonnées (x,μ).

Comme cette codimension $k+n$ est égale à la dimension de l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, le déploiement versel ne contient qu'un seul point de type $\mathcal{T}$, qui est en $(0,0)$.

On voit donc que cette notion de codimension au sens de la définition 5.4 est en relation étroite avec la codimension de la sous-variété $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ qui est une singularité dans $j^l V^n$, au sens de la définition 2.8. Cela justifie la confusion des deux définitions du terme *singularité* : ce mot désigne, soit un type $\mathcal{T}$ de germe, soit le sous-ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ dans un espace de jets qui permet de définir ce type. C'est un abus de langage commode que nous ferons souvent par la suite. Évidemment, la définition en termes de sous-ensemble dans un espace de jets est *a priori* plus restrictive que la définition générale en termes de type de germe.

Considérons maintenant une famille $X_\lambda(x) = X(x,\lambda)$ à un nombre quelconque p de paramètres. Soit l'application $\Psi : (x,\lambda) \mapsto j^l X_\lambda$, on désigne par $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\lambda)$ la contre-image : $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\lambda) = \Psi^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{T}}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (rappelons que $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \mathbb{R}^n \times S_{\mathcal{T}}$). Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est l'ensemble des (x,λ) tels que x soit un point de type $\mathcal{T}$ pour le champ X_λ.

On peut évidemment considérer, comme plus haut, la condition de transversalité à une singularité $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ définissant un type de singularité de codimension finie k, pour un déploiement avec un nombre quelconque p de paramètres. Si ce nombre de paramètres est strictement inférieur à k, l'application jet ne rencontre pas $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\lambda) = \emptyset$. Si le nombre p des paramètres est supérieur à k, alors $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\lambda)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de dimension $p-k$. De plus, en chaque point

$(x, \lambda) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\lambda)$, la famille X_λ est alors localement induite d'un déploiement versel pour la codimension k, par une submersion sur l'espace des paramètres versels. On dira que le déploiement est (en ce point) *transversalement versel.* Comme la propriété de transversalité à une singularité définie dans les l-jets est stable dans la $\mathcal{C}^{l+1}$-topologie, *un déploiement transversalement versel* (par transversalité dans les l-jets) *est $\mathcal{C}^{l+1}$-structurellement stable,* en un sens facile à préciser.

En utilisant les idées du chapitre 2, nous allons déduire de cette transversalité un résultat de généricité pour les singularités d'un type $\mathcal{T}$ fixé, de codimension finie k, associé à la singularité $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Fixons un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert V dans $\mathbb{R}^p$, espace de paramètres (on pourrait aussi bien prendre une variété de dimension n, par exemple S^n et une variété V quelconque pour espace de paramètres). On considère l'espace $\mathcal{X}_V^{n,\infty}(U)$ des familles de champs $X_\mu(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U à paramètre dans V qui s'identifie à l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(U \times V, \mathbb{R}^n)$. En appliquant le théorème 2.5, on obtient le résultat suivant :

Génériquement, une famille de $\mathcal{X}_V^{n,\infty}(U)$ a des singularités de type $\mathcal{T}$ sur une sous-variété $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\mu)$ de codimension $p - k$ de $U \times V$ (vraie sous-variété ou bien ensemble vide si $p \geq k$, sinon la famille n'a génériquement pas de singularité de type $\mathcal{T}$). De plus, génériquement, la famille est transversalement verselle en chaque point de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(X_\mu)$.

Fin de la digression.

Le problème fondamental de la théorie des bifurcations est de caractériser les singularités de codimension finie k et de décrire leurs déploiements versels. Ce programme n'a été réalisé que très partiellement. Pour $n = 2$, on l'a réalisé pour $k \leq 2$. Nous allons décrire ces résultats dans les sections suivantes. Le cas $n = 2$, $k = 3$ a été résolu modulo quelques conjectures concernant des intégrales abéliennes généralisées et des équations de Liénard (voir [57]). Comme nous allons le décrire dans la suite, quelques cas particuliers de singularité en dimension 2 : singularités de type selle-nœud, de type Hopf-Takens, de type Bogdanov-Takens, ont été étudiés en toute codimension.

Très peu de choses ont pu être faites en dimension $n \geq 3$ et en dehors de la codimension $k = 0$ (le problème de la stabilité structurelle considéré dans le chapitre 4), essentiellement à cause de la complexité de la dynamique. La notion de famille verselle perd alors de sa pertinence. On s'intéresse plutôt aux phénomènes arrivant génériquement (ou bien souvent au sens des probabilités) dans les familles génériques. Par exemple dans [53] on étudie, de ce point de vue, les phénomènes dans les familles génériques à 1 paramètre, qui déploient un difféomorphisme en dimension 2, au voisinage d'un point homocline pour lequel les variétés invariantes ont un point de tangence quadratique.

5.4. Réduction à une variété centrale

Le fait de travailler en petite dimension est une restriction moins importante qu'il n'y paraît, grâce à la possibilité de réduire l'étude des singularités et de leurs déploiements à une *variété centrale.*

5.4.1. Champs de vecteurs et difféomorphismes

Nous allons commencer par les champs de vecteurs. Tout d'abord, pour un champ linéaire L de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique décomposition : $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$, invariante par le flot e^{tL}, telle que les valeurs propres de $L|_{E^s}$ aient une partie réelle négative, celles de $L|_{E^i}$ une partie réelle positive et celles de $L|_{E^c}$ une partie réelle nulle. On dit que L est *partiellement hyperbolique* si $E^s \oplus E^i \neq \{0\}$ et si $E^c \neq \{0\}$. Le théorème suivant, dû à Kelley (voir l'appendice de [1] ou bien [32]), étend cette décomposition au cas non linéaire :

Théorème 5.1. *Soit $(X, 0)$ une singularité de champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^r$, avec $r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, en $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$ la décomposition associée à la partie linéaire $dX(0)$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe des sous-variétés de classe $\mathcal{C}^r$: $W^{ss}, W^{ii}, W^{cs}, W^{ci}, W^c$, invariantes par le flot de X et difféomorphes à des disques tangents en 0 à $E^s, E^i, E^c \oplus E^s, E^c \oplus E^i$ et E^c respectivement.*

W^{ss} est appelée variété invariante fortement stable, W^{ii} est appelée variété invariante fortement instable en $0 \in \mathbb{R}^n$. W^{cs} est une variété centre-stable, W^{ci} est une variété centre-instable et W^c *est une variété centrale* de X en $0 \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 5.6. W^{ss} et W^{ii} sont uniques, mais pas nécessairement les autres sous-variétés. Si X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les variétés W^{ss} et W^{ii} sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. En utilisant le théorème 5.1 en classe $\mathcal{C}^r$ avec $r < +\infty$, on peut trouver pour x des variétés W^{cs}, W^{ci}, W^c de classe $\mathcal{C}^r$ mais ces variétés peuvent être différentes pour les valeurs différentes de r et, en général, leur taille décroît et tend vers 0 quand $r \to +\infty$. D'autre part, en général, ces différentes variétés ne définissent pas le même germe en 0 et il n'en existe pas communément de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cependant, ces variétés définissent un unique jet infini en 0 (on peut dire que l'on a existence et unicité formelles).

Si $E^c = \{0\}$, la singularité est hyperbolique et le théorème 5.1 se réduit au théorème 3.3 des variétés invariantes. Si $\dim(E^c) = n$, le théorème est trivial et une variété centrale est juste un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Le théorème suivant, dû à Palis et Takens, généralise le théorème de Hartmann-Grobman :

Théorème 5.2. *Soit X, r, W^c comme dans le théorème précédent, avec $m = \dim(E^c)$, $p = \dim(E^s)$. Alors le germe de X en 0 est conjugué au germe en 0 de :*

$$X' = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{X}_i(z_1, \ldots, z_m)\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=m+1}^{m+p} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=m+p+1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

où $(z_1, \ldots, z_m)$ est un système de coordonnées sur W^c qui s'étend en un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\sum_{i=1}^m \widetilde{X}_i \frac{\partial}{\partial z_i} = X|_{W^c}$.

De plus, si :

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{Y}_i(z_1, \ldots, z_m)\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=m+1}^{m+p} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=m+p+1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

et si le champ $\sum_{i=1}^m \widetilde{Y}_i \frac{\partial}{\partial z_i} = Y|_{W^c}$ est équivalent (respectivement conjugué) au champ $\sum_{i=1}^m \widetilde{X}_i \frac{\partial}{\partial z_i} = X|_{W^c}$, alors Y est équivalent (respectivement conjugué) à X.

On peut étendre très facilement ces résultats aux difféomorphismes. Pour un difféomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$, on a une décomposition analogue $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$ correspondant maintenant à la partition entre valeurs propres de module plus petit que 1, plus grand que 1 et égal à 1. Si g est un germe de difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$ tel que $g(0) = 0$, il existe des variétés invariantes de classe $\mathcal{C}^r$: $W^{ss}, \ldots, W^c$ avec les mêmes propriétés que dans le théorème 5.1. Le théorème 5.2 s'étend également facilement aux germes de difféomorphismes.

5.4.2. Déploiements de champs de vecteurs et de difféomorphismes

On considère maintenant un déploiement X_λ d'un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^n$ avec $X_0(0) = 0$, $\lambda \in (\mathbb{R}^k, 0)$ et $E^i \oplus E^s \oplus E^c$ la décomposition invariante associée à $dX_0(0)$. On peut voir X_λ comme un champ local de vecteurs $\mathcal{X}$ en $(0,0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, avec une composante nulle le long du facteur $\mathbb{R}^k$. Les espaces $E^i, E^s, R^k \oplus E^c$ sont respectivement les espaces fortement instable, fortement stable et central de la partie linéaire de ce champ $\mathcal{X}$. En conséquence, pour tout $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe une variété centrale $\mathcal{W}^c$ de $\mathcal{X}$ de classe $\mathcal{C}^l$, plongée dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ de dimension $m+k$ et tangente en 0 à $R^k \oplus E^c$. Cette sous-variété coupe transversalement chaque facteur $\{\lambda\} \times \mathbb{R}^n$. Les $W^c_\lambda = \mathcal{W}^c \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{R}^n)$ forment une famille de sous-variétés de classe $\mathcal{C}^l$, de dimension m, dépendant de façon $\mathcal{C}^l$ de λ, qui, pour chaque λ, est une variété invariante de X_λ. Ces sous-varietés W^c_λ sont des graphes d'applications de classe $\mathcal{C}^l$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^{n-m}$, et on peut donc les paramétrer par $(z_1, \ldots, z_m) \in R^m$. La variété $\mathcal{W}^c$ elle-même est paramétrée par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.

Soit $\widetilde{X}_\lambda$ la restriction de X_λ à W^c_λ, que l'on appellera *déploiement réduit.* On peut voir $\widetilde{X}_\lambda$ comme un déploiement de classe $\mathcal{C}^l$, de champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Théorème 5.3. *Soit X_λ un déploiement de champs de vecteurs de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^k$, en $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, tel que l'espace central de X_0 en 0 soit de dimension m, $0 \leq m \leq n$. Soit $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors :*

1. *Il existe p, $0 \leq p \leq n-m$, tel que le déploiement X_λ est conjugué au-dessus de l'identité au déploiement*

$$X'_\lambda = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{X}_i(z_1,\ldots,z_m,\lambda)\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=m+1}^{m+p} z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=m+p+1}^{n} z_i\frac{\partial}{\partial z_i},$$

   où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,z_1,\ldots,z_n)$ est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ étendant les coordonnées $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,z_1,\ldots,z_m)$ de $\mathcal{W}^c$. Le déploiement réduit $\widetilde{X}_\lambda = \sum_{i=1}^m \widetilde{X}_i(z_1,\ldots,z_m,\lambda)\frac{\partial}{\partial z_i}$ est la restriction à une variété centrale de classe $\mathcal{C}^l$. C'est un déploiement de classe $\mathcal{C}^l$.

2. *Soit*

$$Y_\lambda = \widetilde{Y}_\lambda(z_1,\ldots,z_m,\lambda) - \sum_{i=m+1}^{m+p} z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=m+p+1}^{n} z_i\frac{\partial}{\partial z_i},$$

   avec

$$\widetilde{Y}_\lambda(z_1,\ldots,z_m,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{Y}_i(z_1,\ldots,z_m,\lambda)\frac{\partial}{\partial z_i},$$

   déploiement de classe $\mathcal{C}^l$. Soit r, $0 \leq r \leq l$. Si $\widetilde{Y}_\lambda$ est $\mathcal{C}^r$,$(\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^r)$-équivalent (ou conjugué) à $\widetilde{X}_\lambda$, alors Y_λ est $\mathcal{C}^r$,$(\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^r)$-équivalent (ou conjugué) à X_λ.

En conséquence, pour tout r, $0 < r < +\infty$, si $(\widetilde{X}_\lambda,(0,0))$, restriction de X_λ à une variété centrale de classe $\mathcal{C}^r$, est un déploiement $\mathcal{C}^r$-versel de $(\widetilde{X}_0,0)$, alors $(X_\lambda,(0,0))$ est un déploiement $\mathcal{C}^r$-versel de X_0. De cette façon, la recherche de déploiements $\mathcal{C}^r$-versels se réduit à la recherche de déploiements $\mathcal{C}^r$-versels de singularités ayant un spectre de valeurs propres purement imaginaires. Pour passer à $r = +\infty$, un point délicat est que, dans cette réduction, la variété centrale et donc le champ réduit ne sont pas, en général, de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais peuvent seulement être choisis de classe $\mathcal{C}^r$, avec r fini mais arbitrairement grand. Sous certaines restrictions, on peut cependant assurer que l'on peut choisir une variété centrale $\mathcal{C}^\infty$ et donc traiter des déploiements $\mathcal{C}^\infty$-versels :

Proposition 5.1. *Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $X(0) = 0$ et $\dim(E^c) \neq 0$. Supposons que X ait une unique variété centrale W^c, et que 0 soit asymptotiquement stable pour $\widetilde{X} = X|_{W^c}$ avec W^c comme bassin d'attraction. Alors W^c est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration. Comme W^c est unique, il suit du théorème 5.1 que, pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un voisinage ouvert W^c_r de 0 dans W^c qui est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^r$. Soit p un point quelconque de W^c. Désignons par $\varphi(t, m)$ le flot de X. Comme W^c est bassin d'attraction du flot $\varphi(t, m)$ pour 0, il existe $T > 0$ tel $\varphi(T, p) \in W^c_r$. Par continuité de $\varphi_T : m \mapsto \varphi(T, m)$, on peut choisir un voisinage ouvert V de p dans W^c tel que $V_T = \varphi(T, V) \subset W^c_r$. L'ouvert V_T est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^r$ car il est contenu dans W^c_r. Comme $\varphi_{-T} : m \mapsto \varphi(-T, m)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'ouvert $V = \varphi^{-1}_{-T}(V_T)$ est aussi une sous-variété de classe $\mathcal{C}^r$. Donc W^c est de classe $\mathcal{C}^r$ au voisinage du point p. Comme p est un point quelconque de W^c, cette sous-variété est globalement de classe $\mathcal{C}^r$. Comme r est un entier positif quelconque, la sous-variété W^c est de classe $\mathcal{C}^\infty$. ∎

La condition d'unicité sera vérifiée si, par exemple, le champ $\tilde{X}$ est asymptotiquement stable en restriction à une variété centrale (ce qui est en fait une condition indépendante du choix de la variété centrale) et que $E^s = \{0\}$.

La conclusion de cette section est que le théorème 5.3 de réduction des familles à une variété centrale permet de *stabiliser en toute dimension $p > n$* un résultat d'existence de déploiements versels obtenu pour une singularité totalement non-hyperbolique de dimension n (totalement non hyperbolique signifie que l'on considère une singularité de champ de vecteurs dont toutes les valeurs propres sont purement imaginaires, ou bien un point fixe de difféomorphisme dont toutes les valeurs propres sont de module égal à 1). Une difficulté technique est qu'il faut avoir obtenu en dimension n un résultat pour la $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^r)$-équivalence entre $\mathcal{C}^r$ déploiements, *avec r arbitrairement grand mais pas infini,* pour pouvoir le stabiliser en résultats pour les dimensions $p > n$, même pour les déploiements $\mathcal{C}^\infty$. Le résultat sera alors stabilisé pour la $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^r)$-équivalence, avec r arbitrairement grand.

Précisément, considérons un déploiement X_λ en dimension p à k paramètres, pour $(x, \lambda) \sim (0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Supposons que la dimension de l'espace central de $dX_{\lambda_0}(0)$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ soit égale à $n < p$. Soit Z_λ une réduction de X_λ à une variété centrale. Cette réduction peut être choisie de classe $\mathcal{C}^r$ avec r arbitrairement grand. Alors X_λ est un déploiement versel de X_{λ_0} si Z_λ est un déploiement versel de Z_{λ_0}. Remarquez que le type topologique de X_{λ_0} et donc du déploiement X_λ dépend du type topologique de la composante hyperbolique de $dX_{\lambda_0}(0)$ qui est

déterminé par le nombre $p-n$ et par le nombre $s \leq p-n$ des valeurs propres de partie réelle négative. Par exemple, si $p-n=1$, cette composante normalement hyperbolique peut être soit stable, soit instable, ce qui donne deux déploiements différents pour un même déploiement Z_λ.

On a pris l'habitude, pour des raisons d'économie de notation, d'appeler par le même nom le type du germe d'une singularité (germe) Z_{λ_0} et celui de tous les germes déduits par stabilisation. Pour distinguer ces différents types, on pourra mentionner la dimension de l'espace. Parfois, le nom choisi peut provenir de l'une des stabilisations et être inadapté, par exemple, au type de plus petite dimension. Cela sera le cas dans la section suivante pour le type « selle-nœud » (voir remarque 5.7).

5.5. Déploiements de type selle-nœud

Dans cette section, nous allons considérer les bifurcations de type selle-nœud. Ce type de bifurcation est apparu dans les exemples 1 et 3 du paragraphe 5.2. Plus que des exemples, il s'agit en fait de modèles pour les bifurcations selle-nœud, ce qui leur donne tout leur intérêt.

Outre les théorèmes d'existence et de réduction à une variété centrale que nous avons rappelés dans le paragraphe 4, nous allons utiliser dans ce paragraphe le théorème de division de Malgrange pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont voici un énoncé :

Théorème 5.4 **(Théorème de division [41]).** *Soit $f(x,\lambda) = f_\lambda(x)$ une famille $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions de $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^k$, définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$. On suppose que f_0 est d'ordre $n \geq 1$ en $0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f_0(0) = \frac{df_0}{dx}(0) = \ldots = \frac{d^{n-1}f_0}{dx^{n-1}}(0) = 0$ et $\frac{d^n f_0}{dx^n}(0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert I de $0 \in \mathbb{R}$ et un voisinage ouvert Λ de $0 \in \mathbb{R}^k$ tels que :*

$$f(x,\lambda) = U(x,\lambda)\Big[x^n + \alpha_{n-1}(\lambda)x^{n-1} + \ldots + \alpha_1(\lambda)x + \alpha_0(\lambda)\Big],$$

où U et les α_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, U est définie sur $I\times\Lambda$ avec $U(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $(x,\lambda) \in I\times\Lambda$ et les α_i sont définies sur Λ et telles que $\alpha_i(0) = 0$ pour $i = 0,\ldots,n-1$.

5.5.1. Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}$

Soit $X(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, défini localement au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f a un zéro d'ordre $k+1, k \in \mathbb{N}$, à l'origine :

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + O(x^{k+2}),$$

avec $a_{k+1} \neq 0$. Considérons un déploiement quelconque de X, représenté par une famille locale :

$$X_\mu(x) = f(x,\mu)\frac{\partial}{\partial x},$$

avec $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l) \in \mathbb{R}^l$, $f(x,0) = f(x)$. En utilisant le théorème de division de Malgrange (théorème 5.4 ci-dessus), on peut écrire que :

$$f(x,\mu) = \pm U(x,\mu)\big(x^{k+1} + \alpha_k(\mu)x^k + \ldots + \alpha_1(\mu)x + \alpha_0(\mu)\big), \qquad (5.2)$$

où $\pm$ est le signe de a_{k+1} et $U(x,\mu) > 0$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et définie sur un voisinage de $(0,0)$. Les fonctions α_i sont $\mathcal{C}^\infty$ et définies sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^l$, avec $\alpha_i(0) = 0$ pour $i = 0, \ldots, k$. Il suit de (5.2) que X_μ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent au-dessus de l'identité (c'est-à-dire modulo la multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive) au déploiement :

$$\pm\big(x^{k+1} + \alpha_k(\mu)x^k + \ldots + \alpha_1(\mu)x + \alpha_0(\mu)\big)\frac{\partial}{\partial x}.$$

De plus, on peut conjuguer cette famille par la famille $\mathcal{C}^\infty$ de translation $x \mapsto x - \frac{\alpha_k(\mu)}{k+1}$ qui change l'expression en :

$$\pm\big(x^{k+1} + \lambda_{k-1}(\alpha)x^{k-1} + \ldots + \lambda_1(\alpha)x + \lambda_0(\alpha)\big)\frac{\partial}{\partial x},$$

où les λ_i sont des polynômes en $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ de la forme $\lambda_i(\alpha) = \alpha_i + o(\alpha)$ pour $i = 0, \ldots, k-1$. Il s'ensuit que les $\beta_i(\mu) = \lambda_i\big(\alpha(\mu)\big)\big)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de μ, telles que $\beta_i(0) = 0$. On a montré :

Théorème 5.5. *Soit $X(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ tel que*

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ a_{k+1} \neq 0.$$

Alors la famille polynomiale :

$$X_\beta(x) = \pm\big(x^{k+1} + \beta_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0\big)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (5.3)$$

de paramètre $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{k-1})$, où $\pm$ est le signe de a_{k+1}, est un déploiement versel de X, au sens de la $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalence (tout déploiement $\mathcal{C}^\infty$ de X est induit par une application $\beta(\mu)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'un déploiement différent de (5.3) par multiplication par une fonction U de classe $\mathcal{C}^\infty$ et positive).

Le déploiement polynomial (5.3) a été décrit dans les exemples 1 et 3 du paragraphe 2 pour $k = 1, 2$ (voir les figures 5.1, 5.2 et 5.4). Un germe (ou singularité) X comme dans le théorème 5.5 admet un déploiement versel à k paramètres et est de codimension k au sens de la définition 5.4. Nous dirons donc que :

Définition 5.6. Un champ $X(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ tel que

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ a_{k+1} \neq 0, \tag{5.4}$$

définit à l'origine une *singularité selle-nœud de dimension* 1 *et de codimension* k. Pour $k = 1$, on dit aussi que la singularité est semi-stable.

Remarque 5.7. La terminologie « selle-nœud » est en fait associée à la stabilisation en dimension 2 des singularités de codimension 1 que l'on vient de définir dans 5.6. L'exemple 2 de la section 2 présente pour $\lambda = 0$ un tel type de germe en dimension 2. Les selles-nœuds de dimension 2 seront présentés en toute généralité dans le paragraphe 5.5.2.

La singularité présentée dans l'exemple 2 de la section 2 est semblable à un nœud dans le demi-plan $\{x < 0\}$ et à un point de selle dans le demi-plan $\{x > 0\}$, d'où le nom choisi ; d'autre part elle bifurque en une paire d'un nœud et d'un point de selle.

Par commodité, le nom « selle-nœud » est utilisé en toute dimension et en particulier en dimension 1, dimension dans laquelle il n'existe évidemment pas de point de selle ! Remarquez que le nom selle-nœud est également mal adapté à des cas de dimension deux ou plus. Par exemple, on décrira dans la section suivante des déploiements de singularités de type selle-nœud en dimension 2 et codimension 2 dont le type topologique est soit un nœud, soit une selle.

Le déploiement versel (5.3) n'est pas l'unique déploiement $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-versel. En fait, tout déploiement $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalent à ce déploiement est $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-versel et inversement. Il est très facile de caractériser ces déploiements versels :

Proposition 5.2. *Soit* $X_\mu(x) = f(x,\mu)\frac{\partial}{\partial x}$ *un déploiement de paramètre* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in (\mathbb{R}^k, 0)$, *d'une singularité* X_0, *de type selle-nœud de codimension* k. *Posons* $f(x,\mu) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i(\mu)x^i + o(x^{k+1})$ *avec par hypothèse :* $a_0(0) = \ldots = a_k(0) = 0$ *et* $a_{k+1}(0) \neq 0$. *Alors ce déploiement est* $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$*-versel si et seulement si l'application* $\mu \mapsto \big(a_0(\mu), \ldots, a_{k-1}(\mu)\big)$ *est un difféomorphisme local en* $0 \in \mathbb{R}^k$ *(c'est-à-dire, si son jacobien en* 0 *n'est pas nul).*

On peut exprimer la versalité du déploiement X_μ ci-dessus en termes de transversalité, comme on l'a expliqué dans le paragraphe 5.3 ci-dessus. Soit $j^{k+1}V^1$ l'espace des $(k+1)$-jets de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}$, identifié à l'espace de dimension $(k+2)$ des champs polynomiaux de degré $k+1$: $\{\sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i \frac{\partial}{\partial x} \mid (a_0, \ldots, a_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}\}$. Dans cet espace, on considère la sous-variété :

$$SN_k^1 = \left\{ \sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i \frac{\partial}{\partial x} \;\middle|\; a_0 = \ldots = a_k = 0,\ a_{k+1} \neq 0 \right\}.$$

Soit $\mathcal{SN}^1_k = \mathbb{R} \times SN^1_k$ la singularité au sens de la définition 2.8, associée dans l'espace $j^{k+1}V^1$ des $k+1$-jets de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$ (la variété $S_{\mathcal{T}}$ de la section 3 associée au type selle-nœud $\mathcal{T}$ est ici nommée SN^1_k). Il est très facile de vérifier la caractérisation suivante :

Lemme 5.1. *Soit $X_\mu(x)$ un déploiement de X, de paramètre $\mu \in (\mathbb{R}^k, 0)$. Ce déploiement est versel si et seulement si l'application jet $j^{k+1}X$ (vue comme section de fibré) est tranverse en $(0,0)$ à $\mathcal{SN}^1_k$.*

Comme il est dit plus haut dans le paragraphe 5.3, le point de type selle-nœud de codimension k est isolé dans la famille verselle.

Considérons maintenant des familles à un nombre quelconque p de paramètres. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute famille X_μ, désignons par $\mathcal{SN}^1_k(X_\mu)$ l'ensemble des $(x,\mu) \in U \times V$ tels que x est un point de type selle-nœud de codimension k de X_μ. En appliquant ce qui est dit plus haut dans le paragraphe 5.3, on obtient :

Théorème 5.6. *Génériquement, une famille de $\mathcal{X}^{1,\infty}_V(U)$ n'a que des points singuliers de type selle-nœud de codimension k avec $0 \leq k \leq p$. Génériquement $\mathcal{SN}^1_k(X_\mu)$ est une sous-variété de dimension $p-k$ de $U \times V$ et, de plus, la famille est transversalement verselle en chaque point de $\mathcal{SN}^1_k(X_\mu)$ (génériquement, $\mathcal{SN}^1_k(X_\mu) = \emptyset$ si $p < k$).*

Remarque 5.8. La transversalité de $j^{l+1}X_\mu(x)$ à $\mathbb{R} \times \mathcal{SN}^1_l$ implique la transversalité de $j^{l'+1}X_\mu(x)$ à $\mathbb{R} \times \mathcal{SN}^1_{l'}$ pour tout $l' \leq l$, car $\mathcal{SN}^1_l \subset \mathcal{SN}^1_{l'}$ pour tout $l' \leq l$. En particulier, dans un déploiement versel X_μ de codimension l, on trouve les ensembles $\mathcal{SN}^1_{l'}(X_\mu)$ pour tout $l' \leq l$ et le jet d'ordre $l'+1$ du déploiement X_μ est transversalement transverse à $\mathcal{SN}^1_{l'}$.

Considérons maintenant un difféomorphisme local $F(x) = x + f(x)$ avec f comme ci-dessus.

Définition 5.7. Un germe de difféomorphisme $F(x) = x + f(x)$ tel que

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ a_{k+1} \neq 0, \tag{5.5}$$

définit à l'origine une *singularité selle-nœud (de difféomorphisme) de dimension 1 et de codimension k*. Pour $k = 1$, on dit aussi que la singularité est semi-stable.

Rappelons que, pour les difféomorphismes, seule est pertinente la relation de conjugaison. Tout déploiement de F de paramètre $\mu \in (\mathbb{R}^l, 0)$ peut être écrit

$F_\mu(x) = x + f(x,\mu)$ avec $f(x,\mu)$ comme ci-dessus et, en conséquence, F_μ peut être écrit :

$$F_\mu(x) = x \pm U(x,\mu)\big(x^{k+1} + \alpha_k(\mu)x^k + \ldots + \alpha_1(\mu)x + \alpha_0(\mu)\big),$$

avec U et les α_i comme ci-dessus. D'autre part, il est clair que deux difféomorphismes de la droite qui ont les mêmes points fixes (en nombre fini), du même type, sont (topologiquement) conjugués. Nous reviendrons sur cette question avec plus de détails dans la section 7, à propos du cas similaire des difféomorphismes de la demi-droite $\mathbb{R}^+$. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème 5.7. *Soit $F(x) = x + f(x) = x + a_{k+1}x^{k+1} + o(x^{k+1})$ un difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $a_{k+1} \neq 0$, $k \geq 1$. Alors, F a le déploiement versel suivant pour la $\mathcal{C}^\infty$-conjugaison :*

$$F_\lambda(x) = x \pm \big(x^{k+1} + \lambda_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0\big), \tag{5.6}$$

où $\pm$ est le signe de a_{k+1} et $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}) \in (\mathbb{R}^k, 0)$ est le paramètre $\mathcal{C}^\infty$-versel.

Remarque 5.9. Pour $k = 1, 2, 3$, il est possible de montrer que F_λ est un déploiement versel au sens de la $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^\infty)$-conjugaison. Par contre pour $k \geq 4$, il peut exister une infinité de déploiements génériques qui sont non équivalents, même au sens de la $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^0)$-conjugaison.

On peut répéter pour les familles $F_\nu(x)$ de difféomorphismes de la droite, avec $\nu \in V$, la digression faite plus haut sur versalité et transversalité et, en particulier, on a un résultat de généricité similaire au théorème 5.6.

5.5.2. Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}^2$

La réduction à la variété centrale permet d'étendre les résultats précédents à la dimension 2.

Définition 5.8. On dit qu'un germe X de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^2$ est une singularité de type selle-nœud de codimension $k \geq 1$, s'il existe un système de coordonnées (x, y) dans lequel :

$$X(x,y) = by\frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1}x^{k+1}\frac{\partial}{\partial x} + o(||m||^{k+1}),$$

avec $b \neq 0, a_{k+1} \neq 0$ et $||m||$ une norme de $m = (x, y)$.

Avec les notations du paragraphe 4, il est équivalent de dire que $\dim(E^c) = 1$ et que la restriction de X à une variété centrale a en 0 une singularité de type selle-nœud (de dimension 1) de codimension k.

Théorème 5.8. *Soit X une singularité $\mathcal{C}^\infty$ de type selle-nœud de codimension $k \geq 1$, en $0 \in \mathbb{R}^2$. Alors la famille*

$$X_\beta(x,y) = \operatorname{sign}(b) y \frac{\partial}{\partial y} + \operatorname{sign}(a_{k+1})\big(x^{k+1} + \beta_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0\big)\frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.7)$$

est un déploiement versel de X au sens de la $(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^r)$-équivalence, pour tout $r \in \mathbb{N}$ assez grand.

Démonstration. Soit X_μ un déploiement $\mathcal{C}^\infty$ quelconque de X. En appliquant le théorème 5.3 on obtient que X_μ est conjugué au-dessus de l'identité à $\widetilde{X}_\mu + \operatorname{sign}(b) y \frac{\partial}{\partial y}$, où $\widetilde{X}_\mu$ est la famille de classe $\mathcal{C}^l$ obtenue comme restriction de X_μ à une variété centrale W^c de classe $\mathcal{C}^l$ (variété paramétrisée par (x,μ)). On peut prendre l arbitrairement grand mais fini. On va prendre $l \geq k+1$ et grand (voir plus loin).

Un problème délicat est que $\widetilde{X}_\mu = \widetilde{f}(x,\mu)\frac{\partial}{\partial x}$ n'est pas $\mathcal{C}^\infty$ en général. Aussi, pour diviser la famille $\widetilde{f}(x,\mu)$ comme dans la sous-section précédente, on doit utiliser une version du théorème de division en classe de différentiabilité finie, due à Barbançon et Lassalle : pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, il existe $l(r) \in \mathbb{N}$, $l(r) \gg r$, tel que l'on puisse trouver $U(x,\mu)$ et des $\alpha_i(\mu)$ de classe $\mathcal{C}^r$ pourvu que la famille soit de classe $l \geq l(r)$. Il s'ensuit que $\widetilde{X}_\mu(x)$ est $\mathcal{C}^r$-induit par la famille $\operatorname{sign}(a_{k+1})\big(x^{k+1} + \beta_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0\big)\frac{\partial}{\partial x}$. D'où le résultat. ∎

5.6. Formes normales

Une *forme normale* pour un germe X de champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ est une écriture simplifiée d'un jet de ce germe en 0 (en général d'un jet d'ordre fini). Les formes normales que nous allons considérer dépendent uniquement de la partie linéaire de X en 0. Dans le cas usuel, la forme normale est, tout simplement, une écriture invariante par l'action du groupe engendré par la partie linéaire : autrement dit, la forme normale admet ce groupe comme groupe de symétrie. L'existence de la forme normale est alors comparable à l'idée que l'on peut *moyenniser* le champ par ce groupe de symétrie. Mais les techniques de formes normales ont une portée plus générale. Nous allons nous en tenir ici à l'essentiel indispensable à la présentation que nous voulons donner de la théorie des bifurcations. Plus d'informations pourront être trouvées dans [9, 61] par exemple. Nous

considérerons successivement le cas des singularités puis celui des déploiements des champs de vecteurs. Le cas des difféomorphismes et de leurs déploiements peut se traiter de façon assez similaire. Nous n'en parlerons pas ici.

5.6.1. Formes normales pour les champs de vecteurs

On considère un germe de champ de vecteurs X en $0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $X = Ax + f(x)$ où $A = dX(0)$ et $f(x) = o(||x||)$, pour une norme $||\cdot||$ de $\mathbb{R}^n$. On veut simplifier l'écriture de X par un changement de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$; autrement dit, on va considérer l'action du groupe de tous les germes de difféomorphismes g en $0 \in \mathbb{R}^n$, tels que $g(0) = 0$. L'action adjointe de cette action est donnée par le crochet de Lie. Comme on veut seulement utiliser la partie linéaire A, on va considérer l'action adjointe $L_A : \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$, donnée par $Z \mapsto [A, Z]$. Ici A désigne aussi le champ linéaire d'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ et $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$, espace des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ de champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$, est l'algèbre de Lie du groupe de Lie infini des germes en 0 de difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$, fixant l'origine. L'action adjointe L_A s'induit sur les jets, et, comme le champ X_0 est linéaire, elle respecte la graduation par le degré : si $H^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des champs de vecteurs polynomiaux homogènes de degré $m \geq 1$ de $\mathbb{R}^n$ (que l'on considère comme des jets de champs en $0 \in \mathbb{R}^n$), on a $L_A(H^m(\mathbb{R}^n)) = [A, H^m(\mathbb{R}^n)] \subset H^m(\mathbb{R}^n)$. Voici l'expression explicite de L_A sur l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$:

Lemme 5.2. *Soit un élément $P \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$[A, P](x) = dP(x)[Ax] - AP(x).$$

Rappelons que A est une matrice $n \times n$ et AP est la composition $A \circ P$. Dans la formule ci-dessus, on identifie les champs avec le second membre de leur équation différentielle associée (par exemple P avec le second membre de l'équation différentielle associée : $\dot{x} = P(x)$).

Démonstration. Rappelons que si $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs, alors $[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$. Appliquons cette formule à $A = (A_1, \ldots, A_n)$, avec $A_i(x) = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$ et $P = (P_1, \ldots, P_n)$ (en identifiant les champs avec le second membre de leur équation différentielle). Nous obtenons :

$$[A, P](x) = \sum_{i,j=1}^n \left(A_i(x) \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x) - P_i(x) \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Examinons chacun des deux termes de droite.

1. D'une part, $\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x) = dP_j(x)[Ax]$ est la composante d'ordre j du vecteur $dP(x)[Ax]$.

2. D'autre part, il résulte de $\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{k=1}^{n} A_{jk}x_k) = A_{ji}$ que :

$$\sum_i P_i(x)\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}P_i(x) = \big[A \circ P(x)\big]_j,$$

est la composante d'ordre j du vecteur $A \circ P(x)$.

On obtient finalement la formule souhaitée :

$$[A, P](x) = dP(x)[Ax] - AP(x). \qquad \blacksquare$$

Désignons l'image $[A, H^m(\mathbb{R}^n)]$ par B^m et choisissons pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un espace complémentaire G^m tel que $G^m \oplus B^m = H^m(\mathbb{R}^n)$. Le résultat suivant est dû à Takens :

Théorème 5.9. *Soit X un germe de champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^r, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, en $0 \in \mathbb{R}^n$. Soit, pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les espaces B^m, G^m définis comme ci-dessus. Alors, il existe un changement de coordonnées $\Phi : x \mapsto y$, polynomial de degré r, avec $\Phi(0) = 0$, tel que $X' = \Phi_*(X)$ soit de la forme :*

$$X'(y) = Ay + g_2(y) + \ldots + g_r(y) + o(||y||^r), \tag{5.8}$$

avec $g_i \in G^i$, pour $i = 2, \ldots, r$.

Démonstration. On va faire, pour $2 \leq s \leq r$, une preuve par récurrence sur s. Supposons que :

$$\dot{x} = X(x) = Ax + g_2(x) + \ldots + g_{s-1}(x) + f_s(x) + o(||x||^s), \tag{5.9}$$

avec $g_i \in G^i$ pour $i = 2, \ldots, s-1$, et une fonction f_s qui est homogène de degré s. On cherche un changement de coordonnées de la forme :

$$x = h(y) = y + P(y), \tag{5.10}$$

où P est une application polynomiale de degré s, que l'on doit déterminer.

Par substitution de (5.10) dans (5.9), on obtient :

$$\big(I + dP(y)\big)\dot{y} = A(y + P(y)) + g_2(y) + \ldots + g_{s-1}(y) + f_s(y) + o(||y||^s),$$

car

$$g_i(y + P(y)) = g_i(y) + o(||y||^s)$$

pour $2 \leq i \leq s-1$, et

$$f_s(y + P(y)) = f_s(y) + o(||y||^s).$$

Ceci résulte des hypothèses : $g_2, \ldots, g_{s-1}$ et f_s sont d'ordre au moins deux et P est d'ordre s. En inversant la matrice $I + dP(y)$, on obtient :

$$\dot{y} = \big(I + dP(y)\big)^{-1}\big[A(y + P(y)) + g_2(y) + \ldots + g_{s-1}(y) + f_s(y) + o(||y||^s)\big].$$

En développant cette expression et en tenant compte que

$$\big(I + dP(y)\big)^{-1} = (I - dP(y)) + o(||y||^s),$$

on obtient :

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \ldots + g_{s-1}(y) + AP(y) - dP(y)[Ay] + f_s(y) + o(||y||^s)\big].$$

Décomposons $f_s(y) = g_s(y) + u_s(y)$, avec $g_s \in G^s$ et $u_s \in B^s$. Par le lemme 5.2 et par définition de B^s, on peut trouver $P \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tel que $AP(y) - dP(y)[Ay] + u_s(y) = 0$, ce qui donne, comme souhaité, la formule (5.8) à l'ordre s. ■

Remarque 5.10.

1. La preuve du théorème 5.9 est constructive et peut être utilisée pour implanter le calcul de forme normale dans des exemples particuliers.

2. On peut pousser la récurrence indéfiniment et utiliser le théorème de Borel (toute série formelle numérique est le jet infini en 0 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$) pour montrer qu'il existe un changement de coordonnées Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tel que $X' = \Phi_*(X)$ a pour jet infini :

$$j^\infty X'(0) = Ax + \sum_{i=2}^{\infty} g_i(x) \quad \text{avec} \quad g_i \in G^i, \ i = 2, 3 \ldots$$

   Ce résultat est purement formel (car la fonction Φ fournie par le théorème de Borel n'est pas unique). En général, la série formelle diverge et ne détermine pas le champ X' lui-même.

3. Beaucoup d'informations concernant les formes normales peuvent être trouvées dans *[9]*. En particulier cette référence contient le traitement des singularités de champs de vecteurs appartenant à des algèbres de Lie particulières, comme par exemple celle des champs hamiltoniens, des champs préservant un volume, etc. Dans tous ces cas, on peut trouver des formes normales dans la même algèbre de Lie.

Choix des espaces G^m

L'intérêt d'une forme normale va dépendre essentiellement du choix des sous-espaces G^m.

(1) Forme normale de Poincaré-Dulac sur $\mathbb{R}$

Un cas important est celui où la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre des valeurs propres de A. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que la matrice A est diagonale, et donc que la partie linéaire de X est égale à $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nous avons le résultat suivant, de démonstration triviale :

Lemme 5.3. *On a*

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \left(\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j\right) x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{5.11}$$

La signification de ce lemme est que l'action adjointe L_A est diagonale sur chaque espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ avec, comme vecteurs propres les champs monomiaux $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_j}$ et comme valeurs propres les quantités $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j$, pour $\sum_{i=1}^n k_i = m$.

Une propriété évidente d'un opérateur diagonal est que le noyau et l'image sont complémentaires. On peut donc prendre pour espace G^m le noyau de l'action adjointe sur $H^m(\mathbb{R}^n)$. Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 5.9. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre d'une application linéaire A sur $\mathbb{R}^n$. On appelle résonance entre les valeurs propres de A toute relation :

$$\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j = 0 \quad \text{avec} \quad k_i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n k_i \geq 2.$$

Ces relations de résonances permettent de définir le noyau de l'action adjointe sur $H^m(\mathbb{R}^n)$. Ce choix remarquable de l'espace G^m conduit à la forme normale de *Poincaré-Dulac* :

Théorème 5.10. *Supposons que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ comme spectre des valeurs propres. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un*

difféomorphisme local Φ *en* $0 \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(0) = 0$, *qui transforme* $X = Ax + o(||x||)$ *dans le germe :*

$$X'(x) = Ax + \sum_{|k| \leq r, j} a_{kj} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_j} + o(||x||^r),$$

avec $a_{kj} \in \mathbb{R}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$ *et la somme prise sur les monômes résonants (remarquez que les coefficients* a_{kj} *sont indexés par une paire formée du multi-indice* $k = (k_1, \dots, k_n)$ *et de l'indice* $j \in \{1, \dots, n\}$*).*

On a un résultat similaire pour les jets infinis.

Exemple : Points de selle en dimension 2

Considérons une singularité de type selle en dimension 2 en $0 \in \mathbb{R}^2$, de partie linéaire $X_1 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

1. Si $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il n'y a pas de résonance : le champ X est linéarisable à tout ordre. Cela signifie que pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on peut trouver un système de coordonnées dans lequel X s'écrit $X_1 + o(||x||^r)$. Comme l'a montré S. Sternberg, on peut aussi linéariser X formellement et même de façon $\mathcal{C}^\infty$ (voir [58] par exemple).

2. Supposons que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) = 1$. Les résonances sont données par les relations : $\alpha = (kq + 1)\alpha + kp(-\beta)$ et $-\beta = k'q\alpha + (k'p + 1)(-\beta)$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il s'ensuit que, dans ce cas dit résonant, la forme normale formelle de Poincaré-Dulac s'écrit :

$$\left(\left(\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x^q y^p)^i \right) x \frac{\partial}{\partial x} - \left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty} b_j (x^q y^p)^j \right) y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

   Les coefficients a_i et b_j dépendent évidemment du champ X considéré. On peut les calculer en utilisant un algorithme déduit du théorème 5.9.

(2) Forme normale de Poincaré-Dulac sur $\mathbb{C}$

On peut étendre les résultats précédents au cas où la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Évidemment, une équation différentielle sur $\mathbb{R}^n$ ne se complexifie pas en général, mais il suffit de raisonner au niveau des jets finis. On obtient alors un résultat analogue à celui du théorème 5.10 : chaque jet d'ordre r, vu comme champ complexe polynomial, a une forme normale qui est combinaison sur $\mathbb{C}$ de monômes résonants. Pour avoir une forme normale à l'ordre r sur $\mathbb{R}$ du champ réel initial, il suffit alors de choisir les coefficients complexes de façon à obtenir une expression réelle.

Nous n'allons traiter que le cas de la dimension 2. Le seul cas de diagonalisation sur $\mathbb{C}$ avec résonance, avec des valeurs propres complexes, est celui d'un champ linéaire de rotation : $X_1 = \alpha(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})$ de valeurs propres $\pm i\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En effet, si les valeurs propres sont $\lambda_1 = \beta + i\alpha, \lambda_2 = \beta - i\alpha$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$, il vient $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = (k_1 + k_2)\beta + (k_1 - k_2)i\alpha \neq \beta \pm i\alpha$, dès que $k_1 + k_2 \geq 2$.

Des coordonnées de diagonalisation dans $\mathbb{C}^2$ sont $\xi = x + iy,\ \eta = x - iy \in \mathbb{C}$. Les monômes vectoriels résonants sont : $(\xi\eta)^k\xi\frac{\partial}{\partial\xi}$ et $(\xi\eta)^k\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. La forme normale de type Poincaré-Dulac dans $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme de l'équation différentielle de $\mathbb{C}^2$:

$$\dot{\xi} = i\alpha\xi + \sum_k c_k(\xi\eta)^k\xi,\ \ \dot{\eta} = -i\alpha\eta + \sum_k d_k(\xi\eta)^k\eta. \tag{5.12}$$

Ici encore, les coefficients c_k et d_k, qui sont dans $\mathbb{C}$, dépendent du champ X considéré. Ces coefficients peuvent se calculer en utilisant un algorithme déduit du théorème 5.9.

On revient ensuite dans les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en tenant compte que sur $\mathbb{R}^2$ on a $\eta = \bar{\xi}$ et donc $\xi\eta = x^2 + y^2$. On obtient :

$$\dot{x} = -\alpha y + \sum_k (x^2 + y^2)^k(c_k\xi + d_k\eta)/2,\ \ \dot{y} = \alpha x + \sum_k (x^2 + y^2)^k(c_k\xi - d_k\eta)/2i.$$

On obtient une forme normale réelle en choisissant $d_k = \bar{c}_k$, avec $c_k \in \mathbb{C}$, ce qui donne :

$$\dot{x} = -\alpha y + \sum_k (x^2 + y^2)^k(a_k x - b_k y),\ \ \dot{y} = \alpha x + \sum_k (x^2 + y^2)^k(b_k x + a_k y),$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. On a finalement obtenu le résultat suivant :

Théorème 5.11. *Soit $X_1 = \alpha(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})$, $\alpha \neq 0$ et $X = X_1 + f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $df(0) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, le champ X est conjugué en classe $\mathcal{C}^\infty$ à la forme normale d'ordre k suivante :*

$$\begin{aligned} X'(x,y) = &\left(\alpha + \sum_{i=1}^{k} b_i(x^2+y^2)^i + o\left((x^2+y^2)^k\right)\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{k} a_i(x^2+y^2)^i + o\left((x^2+y^2)^k\right)\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

De plus X est conjugué en classe $\mathcal{C}^\infty$ à un germe X' tel que :

$$j^\infty X'(0) = \left(\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} b_i (x^2+y^2)^i\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i (x^2+y^2)^i\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (5.14)$$

Remarque 5.11.

1. Les formes normales (5.13) et (5.14) ont une écriture très simple en coordonnées polaires (r,θ) avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Par exemple, pour (5.13) on a l'écriture suivante :
$$X'(r,\theta) = \left(\alpha + \sum_{i=1}^{k} b_i r^{2i} + o\left(r^{2k}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i r^{2i} + o\left(r^{2k}\right)\right) r\frac{\partial}{\partial r}. \quad (5.15)$$
2. La partie principale de la forme normale (5.13) et le jet (5.14) sont invariants par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$, dont l'algèbre de Lie est engendrée par le champ X_1. C'est une propriété qui peut être généralisée dans tous les cas où l'espace G^m est le noyau de l'action adjointe. Cette propriété fait un lien entre la notion de forme normale et celle de moyennisation (voir [9] par exemple).

(3) Cas nilpotent sur $\mathbb{R}^2$

Soit le champ linéaire $X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}$, défini par la matrice nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons l'image B^m de l'action adjointe. On a :

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}, x^i y^{m-i}\frac{\partial}{\partial x}\right] = i x^{i-1} y^{m+1-i}\frac{\partial}{\partial x},$$

et

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}, x^i y^{m-i}\frac{\partial}{\partial y}\right] = -x^i y^{m-i}\frac{\partial}{\partial x} + i x^{i-1} y^{m+1-i}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ces formules impliquent en particulier que le champ $y^m\frac{\partial}{\partial x}$ appartient à la fois au noyau et à l'image de l'action adjointe : $\left[y\frac{\partial}{\partial x}, y^m\frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$ et $\left[y\frac{\partial}{\partial x}, x^1 y^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\right] = y^m\frac{\partial}{\partial x}$. Donc ce noyau n'est pas transverse à l'image et ne peut pas être choisi pour espace G^m. Par contre, on peut choisir

$$G^m = \mathbb{R}\left\{x^m\frac{\partial}{\partial y}, x^{m-1}y\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

En effet, il est immédiat de vérifier que cet espace G^m est transverse à B^m, c'est-à-dire que $G^m + B^m = H^m(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, comme le noyau de l'action adjointe est engendré par les deux vecteurs $y^m \frac{\partial}{\partial x}$ et $xy^{m-1}\frac{\partial}{\partial x} + y^m \frac{\partial}{\partial y}$, il est de dimension 2 et B^m est de codimension 2 dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. Cet espace B^m est donc complémentaire de l'espace transverse G^m de dimension 2, ce qui s'écrit $G^m \oplus B^m = H^m(\mathbb{R}^n)$. On obtient alors la forme normale suivante (dite *forme normale de Takens*) :

$$y\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{m\geq 2} a_m x^m \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{m\geq 2} b_m x^{m-1} y \frac{\partial}{\partial y}. \tag{5.16}$$

5.6.2. Formes normales pour les déploiements de champs

Le théorème 5.9 peut être étendu aux déploiements X_μ avec $\mu \sim 0 \in \mathbb{R}^p$. La différence avec le cas d'un champ sans paramètre est que l'on doit considérer l'action adjointe de $A = dX_0(0)$ également sur les 0-jets et les 1-jets. En effet, dans un déploiement de X_0, l'origine n'est pas nécessairement maintenue fixée (dans le déploiement $(x^2 + \mu)\frac{\partial}{\partial x}$ par exemple).

Soit $\bar{J}^n_k$ l'espace des k-jets de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$, non nécessairement nuls en $0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\bar{B}_k$ l'image de l'action adjointe et $\bar{G}_k$ un espace complémentaire : $\bar{J}^n_k = \bar{B}_k \oplus \bar{G}_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec les notations de la section 5.6.1 étendues aux degrés $m = 0, 1$ on a $\bar{B}_k = \oplus_{m=0}^k B^m$ et $\bar{G}_k = \oplus_{m=0}^k G^m$).

Le résultat suivant, qui étend le théorème 5.9, a été prouvé par Takens [70] :

Théorème 5.12. *Soit X_μ une famille locale à p paramètres, de classe $\mathcal{C}^\infty$, au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, avec $A = dX_0$. On fixe $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $X_1, \ldots, X_r$ une base de $\bar{G}_k$ (r dépend de k). Alors le déploiement défini par X_μ est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué au-dessus de l'identité à :*

$$Ax + \sum_{i=1}^{r} f_i(\mu) X_i + O(||\mu||)O(||x||^{k+1}) + O\big((||\mu|| + ||x||)^l\big), \tag{5.17}$$

où les f_i sont des polynômes de degré l dans les composantes de μ.

Remarque 5.12.

1. La forme compliquée du reste dans la formule (5.17) mérite d'être commentée. Tout d'abord, pour $\mu = 0$, les polynômes f_i sont des constantes, et on retrouve la formule (5.8) du théorème 5.9. D'autre part, les deux termes du reste correspondent à deux types d'expansion : pour les termes purement

en x, on a une expansion à l'ordre k ; pour les termes mixtes en x et μ, on a une une expansion à l'ordre l. Les deux ordres k et l peuvent être choisis de façon indépendante, ce qui a un intérêt dans les applications.

2. On peut étendre la formule (5.17) à $k, l = +\infty$. Le jet infini de la famille (jet à la fois en x et en μ) est formellement conjugué (au-dessus de l'identité) à une série :
$$\sum_{i_1,\dots,i_p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \mu_1^{i_1} \dots \mu_p^{i_p} Z_{i_1 \dots i_p},$$
où les $Z_{i_1 \dots i_p}$ appartiennent à $G_\infty = \cup_k \bar{G}_k$.

5.6.3. Formes normales pour les difféomorphismes

Tous les résultats relatifs aux champs et aux déploiements de champs de vecteurs peuvent être facilement étendus aux difféomorphismes et à leurs déploiements. Nous nous contenterons d'énoncer un théorème dû à Takens [70], très similaire au théorème 5.12 :

Théorème 5.13. *Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. On écrit $A = S \circ N$ où S est semi-simple et N est nilpotent, avec $S \circ N = N \circ S$. Soit $F_\mu(x)$ un déploiement d'un germe F_0 de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^n$, avec $dF_0(0) = A$. Alors, pour tout $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le déploiement F_μ est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué au-dessus de l'identité à un déploiement :*
$$\tilde{F}_\mu = S \circ \widetilde{G}_l + O(||\mu||)O(||x||^{k+1}) + O\big((||\mu|| + ||x||)^l\big), \tag{5.18}$$
où $\widetilde{G}_l$ est le difféomorphisme au temps 1 (c'est-à-dire la valeur du flot au temps $t = 1$) d'un déploiement polynomial $\widetilde{X}_\mu$ de champs de vecteurs, invariant par S : $S_*(\widetilde{X}_\mu) = \widetilde{X}_\mu$.

5.7. Bifurcations de Hopf-Takens

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les déploiements X_μ de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une singularité X_0 ayant à l'origine de $\mathbb{R}^2$ des valeurs propres non nulles mais purement imaginaires et conjuguées. Une telle singularité de champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est parfois appelée *singularité elliptique* (car les valeurs propres sont non nulles, imaginaires conjuguées). À un changement de coordonnées linéaires près, on peut supposer que le 1-jet est un champ de rotation :
$$j^1 X_0(0) = \alpha \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 0.$$

***Remarque* 5.13.** En multipliant le champ par $\frac{1}{|\alpha|}$, on se ramène au cas $\alpha = \pm 1$, à $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalence près sur le déploiement. En fait, si une famille X_λ associée à $\alpha = -1$, la famille $-X_\lambda$ est associée à $\alpha = 1$. Il suffit donc de considérer le cas $\alpha = 1$ pour lequel $j^1X_0(0) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. *Pour simplifier les énoncés, on fera cette hypothèse dans toute la suite de cette section.*

Supposons donc que $j^1X_0(0) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Par le théorème 5.11, on peut supposer que $j^\infty X_0(0)$ est égal à :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x^2+y^2)^i\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j(x^2+y^2)^j\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

***Définition* 5.10.** Soit X_0 une singularité elliptique telle $j^1X_0(0) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ comme ci-dessus. On dira que X_0 est une *singularité de Hopf-Takens de codimension* 1 si $b_1 \neq 0$ (singularité étudiée par Hopf dans les années 40), et est une *singularité de Hopf-Takens de codimension* $k \geq 2$ si $b_j = 0$ pour $1 \leq j < k$ et $b_k \neq 0$. À $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-conjugaison près sur la singularité X_0, on peut alors supposer que ce coefficient est égal à ± 1.

Comme c'est expliqué dans la remarque 5.13, on a aussi à considérer le cas $j^1X_0(0) = -\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$, qui se ramène trivialement au cas précédent.

Aussi, en toute généralité, on dira qu'une singularité est une *singularité de Hopf-Takens de codimension* $k \geq 1$ si, à $\mathcal{C}^\infty$-équivalence près, son $(2k+1)$-jet est égal à

$$\varepsilon_1\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \varepsilon_2(x^2+y^2)^k\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$.

Une singularité de Hopf-Takens de codimension $k \geq 1$ est une singularité elliptique qui est aussi appelée *foyer (faible) d'ordre* k. Par extension, un foyer d'ordre 0 est un *foyer hyperbolique,* c'est-à-dire un germe singulier de valeur propre $\beta \pm i\alpha$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

***Remarque* 5.14.** Si le jet infini d'une singularité est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à

$$\varepsilon_1\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 = \pm 1,$$

on peut dire que cette singularité est une *singularité de Hopf-Takens de codimension infinie* ou bien un *foyer d'ordre infini*. Dans le cas analytique, une singularité

est une singularité de Hopf-Takens de codimension infinie si et seulement si c'est un *centre elliptique*.

Un *centre elliptique*, pour un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, est un germe avec un point singulier elliptique, dont toutes les orbites voisines sont des orbites périodiques entourant ce point singulier (par exemple, un germe de champ hamiltonien de dimension 2, en un point de Morse à hessienne définie positive de sa fonction hamiltonienne).

Dans la suite, on n'étudiera que le cas $\varepsilon_1 = 1$ de la définition 5.10. Le résultat suivant montre que cette définition de la codimension est en accord avec celle introduite dans la définition 5.4 :

Théorème 5.14. *Le déploiement de paramètre $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1})$:*

$$X_\lambda^{k,\pm} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \Big(\lambda_0 + \lambda_1(x^2+y^2) + \ldots + \lambda_{k-1}(x^2+y^2)^{k-1} \pm (x^2+y^2)^k\Big)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (5.19)$$

est un déploiement versel pour la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence, de toute singularité de Hopf-Takens de 1-jet $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ et de codimension $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ à l'origine ; $\pm$ est égal au signe de b_k dans la définition 5.10.

Ce théorème est assez délicat à montrer. Heureusement, un germe de champs de vecteurs en 0, avec un spectre de valeurs propres non réelles, admet une application de Poincaré, ce qui va permettre de ramener l'étude des déploiements de singularités de Hopf-Takens à un problème en dimension 1 :

Lemme 5.4. *Soit un déploiement de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donné par une famille locale X_μ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur un voisinage de $((x,y),\mu) = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ et telle que $X_\mu(0) = 0$ pour tout μ. Supposons que $j^1X_0(0)$ ait un spectre de valeurs propres non réelles $\beta \pm i\alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Alors, quitte à restreindre le voisinage de définition, cette famille de champs admet une famille d'applications de Poincaré $P_\mu(x)$ sur l'axe $0x \approx \mathbb{R}^+$, définie sur un voisinage de $(0,0) \in 0x \times \mathbb{R}^+$. Cette famille $P_\mu(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $P_\mu(0) = 0$ pour tout μ.*

Démonstration. Comme $X_\mu(0) = 0$, la famille s'écrit en coordonnées polaires (ρ,θ) comme une famille $\widehat{X}_\mu(\rho,\theta)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie au voisinage de $\{0\}\times S^1 \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^k$. Si les valeurs propres de X_μ en $0 \in \mathbb{R}^2$ sont égales à $\beta(\mu) \pm i\alpha(\mu)$, on a pour $\widehat{X}_\mu(\rho,\theta)$, au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$, le développement limité suivant :

$$\widehat{X}_\mu(\rho,\theta) = \alpha(\mu)\frac{\partial}{\partial\theta} + O(\rho).$$

En restreignant le domaine de définition de la famille X_μ, on peut supposer que $\alpha(\mu) \neq 0$ pour tout μ (rappelons que, par hypothèse, $\alpha(0) = \alpha \neq 0$). Il s'ensuit que le cercle $\{0\} \times S^1$ dans $\mathbb{R}^+ \times S^1$ (de coordonnées (ρ, θ)), est une orbite périodique du champ $\widehat{X}_\mu$. Cette orbite admet une application de Poincaré $P_\mu(\rho)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \{0\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$, donnant une famille de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$. Comme l'image directe de $\widehat{X}_\mu$, par l'application de coordonnées polaires, est le champ X_μ et que $x \equiv \rho$ sur $\mathbb{R}^+ \times \{0\} = (\mathbb{R}^+ \times S^1)|_{\{\theta=0\}}$, le champ X_μ admet, dans la variable x, la même application $P_\mu(x)$ comme application de Poincaré. Cette application est définie au voisinage de 0 sur l'axe $0x$, axe qui est l'image de $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$ par l'application de coordonnées polaires. ■

5.7.1. Digression sur les homéomorphismes de $\mathbb{R}^+$

Nous allons maintenant donner quelques résultats basiques sur la classification des homéomorphismes en dimension 1, pour la relation de conjugaison (topologique). Ces résultats seront évidemment valables *a fortiori* pour les difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons nous limiter aux homéomorphismes f sur $\mathbb{R}^+$, tels que $f(0) = 0$, qui n'ont qu'*un nombre fini de point fixes*, dont l'origine (figure 5.8). *Désignons par* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$ *l'espace de ces homéomorphismes.* On pourra en déduire des résultats similaires pour les germes en 0 de tels homéomorphismes.

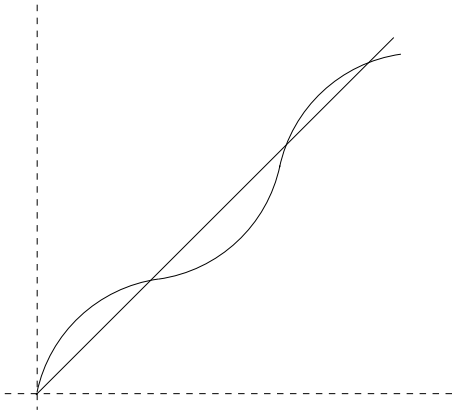


Figure 5.8. Graphe d'un homéomorphisme de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$.

On rappelle que $f, g \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$ sont topologiquement conjugués si et seulement s'il existe un homéomorphisme $h \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$, tel que $g \circ h = h \circ f$.

Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$. L'ensemble $\Sigma(f)$ des points fixes de f est fini par hypothèse. Soit $N(f)$ le nombre de ces points fixes. Le complémentaire $\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma(f)$ est formé de $N(f)$ composantes connexes, qui sont des intervalles ouverts (dont l'un n'est pas borné). Si I est l'un quelconque de ces intervalles, la dynamique sur I est dirigée vers la droite (si $x < f(x)$ pour $x \in I$) ou bien vers la gauche (si $x > f(x)$ pour $x \in I$). On dira que les intervalles du premier type sont de type $+$, et que ceux du second type sont de type $-$. Désignons par $T(f)$ la suite de symboles $+$ et $-$, obtenue en considérant de la gauche vers la droite ces composantes connexes de $\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma_f$ (figure 5.9).

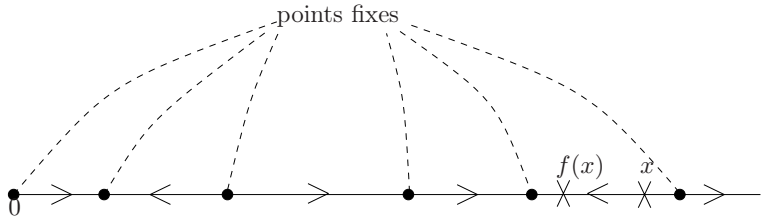


Figure 5.9. Homéomorphisme f de type $T(f) = \{+, -, +, +, -, +\}$.

On a alors le résultat de classification suivant :

Proposition 5.3. *Soit $f, g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$. Alors f et g sont topologiquement conjugués si et seulement si :*

$$N(f) = N(g) \quad \text{et} \quad T(f) = T(g).$$

Démonstration. Soit $f, g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$. Supposons que f, g soient conjugués. Il est trivial que $N(f) = N(g)$. Comme tout homéomorphisme h qui conjugue f, g appartient à $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$, il respecte l'orientation de $\mathbb{R}^+$, ce qui implique que $T(f) = T(g)$.

Supposons inversement que $f, g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$ soient tels que $N(f) = N(g)$ et $T(f) = T(g)$. Il est facile de construire un homéomorphisme h affine par morceaux, qui conjugue g avec $\widetilde{g} \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$, tel que $\Sigma(f) = \Sigma(\widetilde{g})$. Il suffit maintenant de conjuguer f et $\widetilde{g}$.

Soit I un intervalle quelconque, composante connexe de $\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \Sigma(\widetilde{g})$. Comme $T(f) = T(g) = T(\widetilde{g})$, les homéomorphismes f et $\widetilde{g}$ sont de même type $+$ ou $-$ sur I. Nous allons constuire un homéomorphisme h_I de I dans lui-même qui conjugue $f|_I$ avec $\widetilde{g}|_I$ et qui s'étend continûment par $h_I = Id$ sur le bord ∂I de I (bord formé de 1 ou 2 points). Les différents homéomorphismes h_I, ainsi construits et étendus, se recolleront en un homéomorphisme unique $h \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$, conjuguant f et $\widetilde{g}$ sur $\mathbb{R}^+$. On a donc réduit le problème à la construction d'un seul homéomorphisme h_I pour un intervalle I quelconque.

Supposons, pour fixer les idées que f et $\widetilde{g}$ soient de type $+$ sur I. Choisissons deux points quelconques $x_0, x_1 \in I$. On a $f(x_0) > x_0$ et $\widetilde{g}(x_1) > x_1$. Choisissons un homéomorphisme quelconque H de $[x_0, f(x_0)]$ sur $[x_1, \widetilde{g}(x_1)]$, tel que $H(x_0) = x_1$ et $H(f(x_0)) = \widetilde{g}(x_1)$, ce qui implique que :

$$H(x_0) = (\widetilde{g})^{-1} \circ H \circ f(x_0).$$

Pour tout point $x \in I$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(x) \in [x_0, f(x_0)]$ (ici f^n désigne l'itération n fois de f que l'on devrait plutôt écrire $f^{\circ n}$). En effet, posons $I = (a, b)$ et supposons par exemple que $x < x_0$. Comme f n'a pas de point fixe sur I, la suite $\left(f^{\circ n}(x)\right)_n$, qui est strictement croissante, converge vers b. Il existe donc un premier entier $n \geq 1$ tel que $f^n(x) \geq x_0$. Posons $x_1 = f^{n-1}(x)$. Par hypothèse, on sait que $x_1 < x_0$. Comme la fonction f est une application strictement croissante, il en résulte que $f(x_1) = f^n(x) < f(x_0)$ et donc que $f^n(x) \in [x_0, f(x_0)]$.

On définit maintenant h_I par la formule :

$$h_I(x) = (\widetilde{g})^{-n} \circ H \circ f^n(x),$$

où n est tel que $f^n(x) \in [x_0, f(x_0)]$.

On peut vérifier que h_I est bien défini par cette formule malgré le fait que n ne soit pas unique pour tous les points $x \in I$ (s'il existe n tel que $f^n(x) \in \partial[x_0, f(x_0)] = \{x_0, f(x_0)\}$, alors $f^{n+1}(x)$ ou bien $f^{n-1}(x)$ appartient aussi à $\partial[x_0, f(x_0)]$), et que h_I ainsi défini est un homéomorphisme sur I qui s'étend continûment par $h_I = Id$ sur le bord ∂I (ce qui est le seul point un peu délicat de la preuve). Il suit alors de la construction que $h_I \circ f = \widetilde{g} \circ h_I$ et que $h_I|_{[x_0, f(x_0)]} = H$. Comme ces vérifications sont tout à fait analogues à celles faites pour la preuve de la proposition 3.2, nous ne les répèterons pas ici. ■

Remarque 5.15. On peut étendre la proposition 5.3 aux homéomorphismes définis seulement sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^+$. Désignons par $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ l'espace des homéomorphismes f tels que f soit défini sur un intervalle $W_f = [0, x_f]$ où $x_f > 0$, avec un nombre fini $N(f)$ de points fixes sur W_f ; on suppose aussi que $f(x_f) \neq x_f$. On peut aussi définir la suite de symboles $T(f)$ associée à f. On doit adapter la définition de la conjugaison topologique : $f, g \in \mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ sont *topologiquement conjugués* s'il existe $h \in \mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ avec h défini sur $(W_f \cup f(W_f))$ tel que $h(W_f) \subset W_g$ et tel que $g \circ h(x) = h \circ f(x)$ pour tout $x \in W_f$. Avec cette notion de conjugaison topologique, la proposition 5.3 est alors vraie dans l'espace $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. La preuve est identique à celle faite dans $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^+)$.

Soit maintenant $\mathrm{Diff}_0^\infty(R^+)$ l'espace des difféomorphismes f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 0$ et un nombre fini de points fixes (on ne considère que les

difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour simplifier). On peut définir la $\mathcal{C}^r$-équivalence entre famille de difféomorphismes ainsi que la $\mathcal{C}^r$-induction dans cet espace, pour $r = 0, 1, \ldots, +\infty$, de la même façon qu'entre familles de champs de vecteurs (voir définitions 5.1 et 5.2), en remplaçant l'équivalence topologique par la relation de conjugaison topologique dans la définition 5.1.

Ces définitions passent aux déploiements à l-paramètres en $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, en considérant des familles définies sur des voisinages arbitraires de $(0,0)$ et en utilisant la conjugaison dans $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ définie plus haut. Le résultat suivant va être crucial pour établir le théorème 5.14 :

Proposition 5.4. *Pour un $k \geq 2$, on considère des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$: $\lambda_0(\mu), \ldots, \lambda_{k-1}(\mu)$, définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^l$ et telles que*

$$\lambda_0(0) = 0, \ldots, \lambda_{k-1}(0) = 0.$$

On pose :

$$Q_\mu^\pm(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(\mu) x^{2i+1} \pm x^{2k+1}.$$

On considère le déploiement de champs de vecteurs de $\mathbb{R}$ défini en $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$ par $Z_\mu^\pm(x) = Q_\mu^\pm(x)\frac{\partial}{\partial x}$. Soit $\varphi_\mu^\pm(t,x)$ la fonction définissant le flot de $Z_\mu^\pm$. Pour $T > 0$ assez petit, on peut définir en $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$ le déploiement $\Psi_{T,\mu}^\pm(x)$ de difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\infty$, valeur du flot de $Z_\mu^\pm$ au temps T :

$$\Psi_{T,\mu}^\pm(x) = \varphi_\mu^\pm(T,x).$$

Soit $U(x,\mu)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, telle que $U(0,0) > 0$. On considère aussi le déploiement en $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, de difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\infty$ défini par :

$$P_\mu^\pm(x) = x + U(x,\mu) Q_\mu^\pm(x). \tag{5.20}$$

Alors les déploiements $\Psi_{T,\mu}^\pm$ et $P_\mu^\pm$ sont équivalents au-dessus de l'identité et donc $\mathcal{C}^\infty$-équivalents (voir la définition 5.1 et l'item 3 de la remarque 5.1 pour la notion d'équivalence au-dessus de l'identité). Cela signifie ici que l'on peut représenter les deux déploiements par des familles de difféomorphismes, définies sur un voisinage $U \times W \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, tels que, pour tout $\mu \in W$, les difféomorphismes $x \mapsto \Psi_{T,\mu}^\pm(x,\mu)$ et $x \mapsto P_\mu^\pm(x)$ appartiennent à l'espace $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$, et sont topologiquement conjugués dans cet espace.

Le champ $Z_\mu^\pm$ n'est pas complet quelle que soit la valeur de μ. En fait on a le lemme suivant :

Lemme 5.5. *Un champ de vecteurs polynomial $P(x)\frac{\partial}{\partial x}$ de $\mathbb{R}$ est complet si et seulement si le polynôme $P(x)$ est de degré inférieur ou égal à 1.*

Démonstration. Il est clair, évidemment, qu'un champ de degré inférieur ou égal à 1 est complet. En effet, un tel champ s'écrit $(a+bx)\frac{\partial}{\partial x}$ et son flot, qui est donné par $\varphi_t(x) = x + at$ si $b = 0$ et par $\varphi_t(x) = (x + \frac{a}{b})\exp(bt) - \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$, est défini pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Inversement, considérons un champ $P(x)\frac{\partial}{\partial x}$ de degré $k \geq 2$. En multipliant le champ par une constante non nulle (ce qui ne change évidemment pas la propriété d'être complet ou pas), on peut supposer que :

$$P(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i,$$

pour un $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ quelconque. Par un calcul direct, on a montré au paragraphe II-3.3.3, que le champ $x^2\frac{\partial}{\partial x}$ n'est pas complet, et donc aussi le champ $Ax^2\frac{\partial}{\partial x}$ pour un $A > 0$ quelconque. Plus précisément, la trajectoire $\varphi_0(t)$ de $Ax^2\frac{\partial}{\partial x}$ par un point $x_0 > 0$ n'est définie, pour les $t > 0$, que sur un intervalle $[0, t_0[$, pour un $t_0 > 0$ fini, dépendant de x_0 et A. L'idée est de comparer la trajectoire du champ général $P(x)\frac{\partial}{\partial x}$ à celle d'un champ particulier $Ax^2\frac{\partial}{\partial x}$, pour un x_0 au voisinage de $+\infty$.

Tout d'abord, remarquons que, pour $0 < A < 1$ quelconque, on peut trouver $X > 0$ (dépendant de a), tel que $P(x) > Ax^2$ pour $x \geq X$. En effet le rapport $\frac{P(x)}{x^2}$ tend vers une limite plus grande que 1 pour $x \to +\infty$ (cette limite est $+\infty$ si $k \geq 3$).

Choisissons de telles valeurs A et X et un $x_0 \geq X$ quelconque. Soit $\varphi(t)$ la trajectoire de $P(x)\frac{\partial}{\partial x}$ par x_0. Nous avons rappelé plus haut que le domaine de définition de φ_0, pour les $t \geq 0$, est un intervalle $[0, t_0[$ avec $t_0 > 0$ fini et $\varphi_0(t) \to +\infty$, pour $t \to t_0$. Nous allons prouver par l'absurde une propriété analogue pour $\varphi(t)$, ce qui impliquera que le champ $P(x)\frac{\partial}{\partial x}$ n'est pas complet.

Supposons au contraire que $\varphi(t)$ soit définie sur $[0, +\infty)$ (et donc en particulier sur $[0, t_0[$). Comme $\frac{d\varphi}{dt}(0) = P(x_0) > Ax_0^2 = \frac{d\varphi_0}{dt}(0)$ on a $\varphi(t) > \varphi_0(t)$ pour $t > 0$ assez petit. La dernière inégalité est en fait vérifiée pour tout $t \in]0, t_0[$. En effet, si cela n'était pas le cas, soit t_1 la borne supérieure des t tels que $\varphi_0(t) < \varphi(t)$ pour tout $t \in]0, t_1[$ avec $\varphi(t_1) = \varphi_0(t_1) = x_1 > x_0$ (la borne supérieure est atteinte). Pour cette valeur t_1, on a $\frac{d\varphi}{dt}(t_1) = P(x_1) > Ax_1^2 = \frac{d\varphi_0}{dt}(t_1)$. Soit $\psi = \varphi - \varphi_0$, on a donc $\psi(t_1) = 0$ et $\frac{d\psi}{dt}(t_1) > 0$, d'où $\psi(t) < 0$ pour les $t < t_1$ et assez proches de t_1, c'est-à-dire que $\varphi(t) < \varphi_0(t)$ pour les $t < t_1$ et assez proches de t_1, ce qui contredit la définition de t_1. Donc $\varphi(t) > \varphi_0(t)$ pour tout $t \in]0, t_0[$. Il s'ensuit que $\varphi(t) \to +\infty$ pour $t \to t_0$, le domaine de définition de φ est un sous-intervalle

de $[0, t_0[$. La trajectoire $\varphi(t)$ ne peut pas être définie sur $[0, +\infty)$, contrairement à l'hypothèse faite. ■

Remarque 5.16.

1. Si l'on considère, par contre, la famille $Z_\mu^\pm$ dans un voisinage *compact* $U \times W \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, on peut l'intégrer à partir de $(x, \mu) \in U \times W$ pour un temps $T > 0$ assez petit. Comme $Z_\mu^\pm(0) = 0$, on peut définir $x \mapsto \Psi_{T,\mu}^\pm(x)$ comme difféomorphisme sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^+$.

2. Si $U(x, \mu) \equiv 1$ par exemple, la fonction $x \mapsto P_\mu^\pm(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ quel que soit μ, mais n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$. Cette famille d'applications devient le représentant d'un déploiement de difféomorphismes, si on la restreint à un voisinage compact $U \times W$ de $(0, 0)$ de taille assez petite.

Preuve de la proposition 5.4. On peut choisir un voisinage compact $V \times W$ de $(0, 0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$ dans lequel $\Psi_{T,\mu}^\pm(x)$ et $P_\mu^\pm(x)$ sont des familles dans $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. On peut aussi supposer que $U(x, \mu) > 0$ pour $(x, \mu) \in V \times W$.

Soit un μ quelconque dans W. Les points fixes de $x \mapsto \Psi_{T,\mu}^\pm(x)$ sont les zéros de la fonction $Q_\mu^\pm(x)$. Ces zéros sont aussi les points fixes de $x \mapsto P_\mu^\pm(x)$. Donc, si $Z(Q_\mu^\pm)$ est l'ensemble des zéros de $Q_\mu^\pm$, on obtient que $\Sigma(\Psi_{T,\mu}^\pm) = \Sigma(P_\mu^\pm) = Z(Q_\mu^\pm)$ et donc que $N(\Psi_{T,\mu}^\pm) = N(P_\mu^\pm)$. Si $Q_\mu^\pm(x) > 0$ sur un intervalle ouvert I, composante connexe de $U \setminus Z(Q_\mu^\pm)$, alors le champ $Z_\mu^\pm$ est dirigé vers la droite. Il en résulte que I est un intervalle de type $+$ pour $\Psi_{T,\mu}^\pm$. De même, cet intervalle est de type $+$ pour $P_\mu^\pm$. On a le même argument pour les intervalles de type $-$. Il en résulte que $T(\Psi_{T,\mu}^\pm) = T(P_\mu^\pm)$. En appliquant la proposition 5.3 (voir remarque 5.15), on obtient que $\Psi_{T,\mu}^\pm$ et $P_\mu^\pm$ sont topologiquement conjugués sur U. ■

5.7.2. Démonstration du théorème 5.14

Soit X_μ un déploiement d'une singularité de Hopf-Takens de codimension k avec $((x, y), \mu) \sim (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^l$. En multipliant le déploiement X_μ par une constante non nulle, on peut supposer que $j^1 X_0(0) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

L'origine est un point non dégénéré pour le champ X_0. En appliquant le théorème des fonctions implicites à la famille X_μ on peut supposer que l'origine reste un point singulier (isolé) pour toute valeur de μ assez petite (et donc pour une famille représentant le déploiement). Dorénavant, on va supposer cette propriété vérifiée : $X_\mu(0) = 0$ pour tout μ.

D'autre part, comme X_0 est une singularité de Hopf-Takens de codimension k, on peut lui appliquer le théorème 5.11 et supposer qu'il est sous forme normale à l'ordre $2k+1$. En coordonnées polaires (r,θ), cette forme normale s'écrit :

$$X_0(\rho,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} + \Big(\lambda_k\rho^{2k+1} + o\big(\rho^{2k+1}\big)\Big)\frac{\partial}{\partial\rho}, \tag{5.21}$$

avec $\lambda_k \neq 0$.

Il suit du lemme 5.4 que l'on peut associer au déploiement X_μ un déploiement d'applications de Poincaré $P_\mu(x)$ sur l'axe $0x \sim \mathbb{R}^+$. On choisit une famille représentant ce déploiement, définie sur un voisinage $U \times W$ de $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$.

Cette application est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \times W$, avec $P_\mu(0) = 0$ pour tout $\mu \in W$. Il suit de (5.21) que pour $\mu = 0$, l'application P_0 est obtenue par intégration, entre 0 et 2π, d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda_k\rho^{2k+1} + o(\rho^{2k+1}),$$

à partir de la condition initiale $\rho(0) = x$. Il s'ensuit que :

$$P_0(x) = r(2\pi) = x + 2\pi\lambda_k x^{2k+1} + o(x^{2k+1}).$$

Nous allons appliquer le théorème de division de Malgrange à $P(x,\mu) - x$. Auparavant, il convient de faire une remarque sur un caractère de symétrie de cette famille, remarque intéressante car elle permet de réduire à k le nombre des paramètres versels de P_μ. Au voisinage de l'origine, le flot de X_μ est transverse à chaque demi-droite issue de l'origine (ce que l'on vérifie facilement en passant en coordonnées polaires). En particulier, le flot de X_μ induit un difféomorphisme de transition $x \mapsto R_\mu(x)$ entre le demi-axe Ox^+ et le demi-axe négatif Ox^- et $P_\mu = R_\mu \circ R_\mu = R_\mu^2$. D'autre part $R'_\mu(0) = -1$, car $P'_\mu(0) = 1$ (voir (5.20)) et que $R'_\mu(0) < 0$ par construction. Une application du théorème 5.13 nous dit que, compte tenu du fait que $R_\mu(0) = 0$ pour tout μ, on a une forme normale à l'ordre $2k+1$ pour la $(\mathcal{C}^\infty,\mathcal{C}^\infty)$-conjugaison, qui est une expansion uniquement sur les monômes impairs : $x, x^3, \ldots, x^{2k+1}$. En conséquence, il en est de même pour P_μ qui est donc $(\mathcal{C}^\infty,\mathcal{C}^\infty)$-conjugué à :

$$x + \gamma_0(\mu)x + \gamma_1(\mu)x^3 + \ldots + \gamma_k(\mu)x^{2k+1} + o(x^{2k+1}), \tag{5.22}$$

pour des fonctions γ_i de classe $\mathcal{C}^\infty$, telles que $\gamma_0(0) = \ldots = \gamma_{k-1}(0) = 0$ et $\gamma_k(0) = 2\pi\lambda_k \neq 0$.

En fait, on peut obtenir mieux. On peut réduire P_μ par une $(\mathcal{C}^\infty,\mathcal{C}^\infty)$-conjugaison à une fonction impaire, c'est-à-dire telle que $P_\mu(x) \equiv x\tilde{P}_\mu(x^2)$ pour une fonction $\tilde{P}_\mu$ de classe $\mathcal{C}^\infty$: on démontre tout d'abord ce résultat pour le jet infini en

$x = 0$, en généralisant l'argument utilisé ci-dessus à l'ordre $2k + 1$; en utilisant ensuite le théorème de Borel [1], on se ramène à une fonction $\mathcal{C}^\infty$-plate en $x = 0$; une telle fonction plate est trivialement impaire.

Il suit alors du théorème de division 5.4 (théorème qui respecte la parité de la famille considérée !) que, à $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-conjugaison près :

$$P_\mu(x) = x + U(x,\mu)\Big(\lambda_0(\mu)x + \lambda_1(\mu)x^3 + \ldots + \lambda_{k-1}(\mu)x^{2k-1} \pm x^{2k+1}\Big), \quad (5.23)$$

où les U, α_i sont $\mathcal{C}^\infty$, et $U(x,\mu)$ est une fonction paire de x (car on peut réduire P_μ à une fonction impaire), c'est-à-dire telle que $U(x,\mu) \equiv \tilde{U}(x^2,\mu)$, avec une fonction $\tilde{U}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$, ceci pour tout μ. D'autre part $U(0,0) = |2\pi\lambda_k| > 0, \lambda_i(0) = 0$ pour $i = 0, \ldots, k-1$ et $\pm$ est le signe de λ_k. On peut relever la $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-conjugaison de P_μ, avec le terme de droite de (5.23), en une $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalence du déploiement X_μ avec un déploiement ayant les mêmes propriétés que précédemment et que l'on appellera encore X_μ. En utilisant (5.20), on peut écrire :

$$P_\mu(x) = P_\mu^\pm(x) = x + U(x,\mu)Q_\mu^\pm(x), \quad (5.24)$$

avec

$$Q_\mu^\pm(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(\mu)x^{2i+1} \pm x^{2k+1}.$$

Revenons maintenant au déploiement (5.19) que l'on veut montrer être versel. Ce déploiement s'écrit en coordonnées polaires :

$$X_\lambda^{k,\pm} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\rho^{2i+1} \pm \rho^{2k+1}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

L'application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\lambda : \mu \mapsto (\lambda_0(\mu), \ldots, \lambda_{k-1}(\mu))$, induit le déploiement

$$X_{\lambda(\mu)}^{k,\pm} = \frac{\partial}{\partial\theta} + Q_\mu^\pm(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Comme dans la proposition 5.4, on désigne par $\Psi_{T,\mu}^\pm(x)$ l'application définie en intégrant le champ $Q_\mu^\pm(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}$ à partir de $x \geq 0$ jusqu'au temps T. Alors, au déploiement de champs $X_{\lambda(\mu)}^{k,\pm}$ est associé un déploiement d'applications de Poincaré sur l'axe $0x$ en 0, égal à $\Psi_{2\pi,\mu}^\pm(x)$.

Il suit de la proposition 5.4 que les deux déploiements d'applications $\Psi_{2\pi,\mu}^\pm(x)$ et $P_\mu^\pm(x)$ sont équivalents au-dessus de l'identité (pour la relation de conjugaison topologique).

La proposition 1.1 implique alors que, pour tout μ, le champ $X^{k,\pm}_{\lambda(\mu)}$ est topologiquement équivalent au champ X_μ au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Cette dernière proposition n'est valide que si les champs X_μ et $X^{k,\pm}_{\lambda(\mu)}$ ont une même section globale. Or, à vrai dire, l'axe $0x$ n'est qu'une section locale des deux champs au voisinage de 0. Cependant, si les déploiements d'applications $\Psi^{\pm}_{2\pi,\mu}(x)$ et $P^{\pm}_{\mu}(x)$ sont représentés par des familles sur un voisinage compact $U \times W$ de $(0,0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$, la proposition 1.1 fournit un homéomorphisme de conjugaison H_μ entre $X^{k,\pm}_{\lambda(\mu)}$ et X_μ, défini sur le voisinage $\mathcal{U}_\mu$ obtenu en saturant U par les trajectoires de $X^{k,\pm}_{\lambda(\mu)}$. Il suit facilement de la compacité de U que $\cap_{\mu\in W}\mathcal{U}_\mu$ contient un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, et donc que l'on obtient une équivalence au-dessus de l'identité, entre les déploiements $X^{k,\pm}_{\lambda(\mu)}$ et X_μ en $((0,0),0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^l$. Ceci achève la preuve du théorème 5.14. ■

5.7.3. Caractérisation des déploiements versels

Nous allons tout d'abord montrer que tout déploiement de singularité de type Hopf-Takens de codimension k admet une forme normale à l'ordre $2k+1$. Comme plus haut, on suppose que $j^1X_0(0) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

Lemme 5.6. *Soit X_μ un déploiement $\mathcal{C}^\infty$ quelconque de X_0, singularité de type Hopf-Takens de codimension k, avec $\mu \in (\mathbb{R}^l, 0)$. Alors ce déploiement est $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalent à :*

$$X^1_\mu = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \left(\sum_{j=0}^{k} \beta_j(\mu)(x^2+y^2)^j + \bar{g}(x,y,\mu)\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (5.25)$$

où les $\beta_j, \bar{g}$ sont $\mathcal{C}^\infty$, $\beta_k(0) \neq 0$ et $\bar{g} = o(||x^2+y^2||^k)$.

Démonstration. Soit X_μ un déploiement comme dans l'énoncé. L'origine est un point non dégénéré pour le champ X_0. Comme dans la preuve du théorème 5.14, on peut supposer que l'origine de $\mathbb{R}^2$ reste un point singulier (isolé) pour toute valeur de μ assez petite.

En utilisant une version à paramètre du théorème 5.11 plutôt que le théorème 5.12 lui-même, on obtient que la famille X_μ est $\mathcal{C}^\infty$-conjuguée à :

$$\tilde{X}^1_\mu = \left(\alpha(\mu) + \sum_{j=1}^{k} a_j(\mu)(x^2+y^2)^j + f(x,y,\mu)\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\sum_{j=0}^{k} b_j(\mu)(x^2+y^2)^j + g(x,y,\mu)\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (5.26)$$

où α, b_j, a_j, f, g sont $\mathcal{C}^\infty$ avec $\alpha(0) = 1$ et $f, g = o(||x^2 + y^2||^k)$. L'hypothèse que X_0 est une singularité de type Hopf-Takens de codimension k se traduit par les conditions : $b_0(0) = \ldots = b_{k-1}(0) = 0$ et $b_k(0) \neq 0$.

Cette forme normale mérite une explication. Tout d'abord, comme l'origine est un point singulier pour tout μ, on a :

$$j^1 X_\mu(0) = \alpha(\mu)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + b_0(\mu)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Les valeurs propres de ce champ sont complexes conjuguées, égales à $b_0(\mu) \pm i\alpha(\mu)$. Dès que $b_0(\mu) \neq 0$, il n'y a plus de résonance (voir la définition 5.9). On pourrait alors linéariser le champ X_μ à l'ordre k. Mais cette linéarisation ne pourrait pas être étendue de façon différentiable par rapport au paramètre μ en $\mu = 0$, justement à cause de l'hypothèse $b_k(0) \neq 0$. On utilise plutôt l'idée suivante. L'espace G^{2i+1}, utilisé pour la forme normale de X_0, est engendré par les champs

$$(x^2 + y^2)^i\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad (x^2 + y^2)^i\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

espace qui est transverse à l'image $B_0^{2i+1} = [j^1 X_0(0), H^{2i+1}(\mathbb{R}^2)]$ (espace noté B^{2i+1} dans le paragraphe 6.1). Cet espace G^{2i+1} *reste transverse* pour $\mu \sim 0$ à $B_\mu^{2i+1} = [j^1 X_\mu(0), H^{2i+1}(\mathbb{R}^2)]$ (mais non complémentaire à B^{2i+1} en général). La même démonstration que celle faite pour le théorème 5.9 fournit alors la forme normale (5.26) dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre μ.

En divisant $\widetilde{X}_\mu^1$ par la fonction positive $\alpha(\mu) + \ldots$ (qui est positive dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0), \mu = 0$, puisque $\alpha(0) = 1$), on obtient dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0), \mu = 0$, une famille $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalente :

$$X_\mu^1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \left(\sum_{j=0}^{k} \beta_j(\mu)(x^2 + y^2)^j + \bar{g}(x, y, \mu)\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (5.27)$$

où les $\beta_j, \bar{g}$ sont $\mathcal{C}^\infty$, $\bar{g} = o(||x^2 + y^2||^k)$ et $\beta_k(0) \neq 0$, car X_0 est une singularité de type Hopf-Takens de codimension k. ■

Nous désignerons simplement par X_μ le déploiement (5.27) écrit sous forme normale. Ce déploiement s'écrit en coordonnées polaires :

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\sum_{j=0}^{k} \beta_j(\mu)\rho^{2j+1} + o(\rho^{2k+1})\right)\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (5.28)$$

où $o(\rho^{2k+1})$ désigne une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de (ρ, μ, θ).

Nous avons vu plus haut, dans la preuve du théorème 5.14, que tout déploiement X_μ d'une singularité de type Hopf-Takens de codimension k, admet un déploiement d'applications de Poincaré sur l'axe $0x$ de la forme (5.22), avec des coefficients $\gamma_0(\mu), \ldots, \gamma_k(\mu)$, qui peut se mettre sous la forme (5.24), avec des coefficients $\lambda_0(\mu), \ldots, \lambda_{k-1}(\mu)$. Tous ces coefficients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'annulent tous en $\mu = 0$, sauf $\gamma_k(0)$. Nous allons comparer les trois systèmes de coefficients : γ_i, λ_i et β_i (coefficients intervenant dans (5.27)). On pose :

$$\gamma(\mu) = (\gamma_0(\mu), \ldots, \gamma_{k-1}(\mu)), \quad \lambda(\mu) = (\lambda_0(\mu), \ldots, \lambda_{k-1}(\mu)),$$

et

$$\beta(\mu) = (\beta_0(\mu), \ldots, \beta_{k-1}(\mu)) \ ;$$

γ, λ, β sont des germes en $0 \in \mathbb{R}^l$, d'applications de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^k$, tels que $\gamma(0) = \lambda(0) = \beta(0) = 0 \in \mathbb{R}^k$. On a :

Proposition 5.5. *Supposons que la dimension l du paramètre μ soit égale à k, la codimension de la singularité X_0. Alors, les trois germes d'applications γ, λ, β sont des germes de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}^k$, si et seulement si c'est le cas pour l'un d'entre eux.*

Démonstration. Un germe en $0 \in \mathbb{R}^k$, d'application $\phi(\mu)$ de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$, est un germe de difféomorphisme si et seulement si $j^1\phi(0) = d\phi(0)$ est représenté par une matrice inversible, matrice que l'on peut calculer en écrivant un développement limité de ϕ à l'ordre 1 en $0 \in \mathbb{R}^k$.

1. *Comparaison de $\gamma(\mu)$ et de $\lambda(\mu)$*

   La fonction $U_\mu(x)$ étant paire (voir (5.23)), on peut écrire :

   $$U_\mu(x) = \sum_{i=0}^{k-1} U_i(\mu) x^{2i} + o(x^{2k}), \tag{5.29}$$

   où $U_0, \ldots, U_{k-1}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $U_0(0) > 0$. On choisit un représentant du déploiement X_μ tel que $U_0(\mu) > 0$ pour tout μ. En portant (5.29) dans (5.24), et en développant en puissance de x, on retrouve le développement (5.22), ce qui donne :

   $$\gamma_i(\mu) = \sum_{j=0}^{i} U_j(\mu)\lambda_{i-j}(\mu) \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, k-1. \tag{5.30}$$

   La formule (5.30) implique que :

   $$\mathrm{Det}\big(d\gamma(0)\big) = U_0^k(0)\mathrm{Det}\big(d\lambda(0)\big). \tag{5.31}$$

   où Det désigne le déterminant de la matrice jacobienne de la différentielle.

2. *Comparaison de $\beta(\mu)$ et de $\gamma(\mu)$*

Les orbites de (5.28) peuvent être paramétrées en coordonnées polaires comme graphes de fonctions $R(\theta)$, solutions d'une équation différentielle

$$E_\mu \ : \frac{dR}{d\theta} = \sum_{j=0}^{k} \beta_j(\mu) R^{2j+1} + o(R^{2k+1}).$$

Désignons par $R(\theta, x, \mu)$ la solution de E_μ de condition initiale $x \geq 0$, c'est-à-dire telle que $R(0, x, \mu) = x$. Comme l'équation E_μ est impaire en R à l'ordre $2k-1$, la solution $R(\theta, x, \mu)$ est aussi impaire par rapport à x, au même ordre. Elle se développe donc à cet ordre en puissances impaires de x :

$$R(\theta, x, \mu) = \sum_{i=0}^{k-1} \Gamma_i(\theta, \mu) x^{2i+1} + o(x^{2k}). \tag{5.32}$$

En portant ce développement dans l'équation E_μ, on obtient un système diagonal d'équations différentielles pour les coefficients $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{k-1}$, qui peut s'intégrer par récurrence sur i :

$$\frac{d\Gamma_0}{d\theta} = \beta_0 \Gamma_0, \quad \frac{d\Gamma_1}{d\theta} = \beta_0 \Gamma_1 + \beta_1 \Gamma_0^3, \ldots$$

On trouve par intégration :

$$\Gamma_0(\theta, \mu) = \exp\big(\beta_0(\mu)\theta\big), \quad \Gamma_1(\theta, \mu) = \beta_1(\mu)\Gamma_0(\theta, \mu) \int_0^\theta \Gamma_0^2(\tau, \mu) d\tau. \tag{5.33}$$

En utilisant cette expression de Γ_1, on montre facilement par récurrence que l'équation différentielle sur Γ_i, pour $i \geq 2$, prend la forme :

$$\frac{d\Gamma_i}{d\theta} = \beta_0 \Gamma_i + \beta_i \Gamma_0^{2i+1} + O(||\mu||^2)$$

où $||\cdot||$ est une norme quelconque de $\mathbb{R}^k$. En intégrant cette équation différentielle, on obtient :

$$\Gamma_i(\theta, \mu) = \beta_i(\mu)\Gamma_0(\theta, \mu) \int_0^\theta \Gamma_0^{2i}(\tau, \mu) d\tau + O(||\mu||^2), \tag{5.34}$$

pour $i \geq 1$. L'application de Poincaré sur l'axe Ox est donnée par $P_\mu(x) = R(2\pi, x, \mu)$. Il s'ensuit que $\gamma_0(\mu) = \Gamma_0(2\pi, \mu) - 1$ et $\gamma_i(\mu) = \Gamma_i(2\pi, \mu)$ pour

$i \geq 1$. On obtient finalement les formules suivantes, en utilisant (5.33) et (5.34) :

$$\gamma_0(\mu) = \exp\big(2\pi\beta_0(\mu)\big) - 1 = 2\pi\beta_0(\mu) + O(||\mu||^2), \tag{5.35}$$

et

$$\gamma_i(\mu) = C_i(\mu)\beta_i(\mu) + O(||\mu||^2), \tag{5.36}$$

pour $i = 1, \ldots, k-1$. Les $C_i(\mu) = \exp(2\pi\beta_0(\mu)) \int_0^{2\pi} \Gamma_0^{2i}(\tau, \mu) d\tau$ sont des fonctions de μ strictement positives.

En utilisant les formules (5.36) et (5.35), on obtient :

$$\mathrm{Det}\big(d\gamma(0)\big) = 2\pi C_1(0) \ldots C_{k-1}(0) \mathrm{Det}\big(d\beta(0)\big). \tag{5.37}$$

3. *Fin de la preuve de la proposition 5.5*

   Comme $U_0^k(0) > 0$ et $2\pi C_1(0) \ldots C_{k-1}(0) > 0$, le résultat suit clairement de (5.31) et (5.37). ■

Comme conséquence directe de la proposition 5.5, on obtient la caractérisation suivante des déploiements versels des singularités de type Hopf-Takens de codimension k :

Théorème 5.15. *Un déploiement X_μ de singularité de type Hopf-Takens de codimension k est versel (pour la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence) si et seulement si l'un des trois germes $\gamma(\mu), \lambda(\mu), \beta(\mu)$ définis ci-dessus est un germe de difféomorphisme.*

Démonstration. Soit X_μ un déploiement comme dans l'énoncé. Une condition nécessaire pour la versalité est que la dimension l de l'espace du paramètre μ soit égale à k, ce que l'on va supposer. Le théorème 5.14 nous a fourni un premier déploiement versel (5.19). Un autre déploiement X_μ est versel si et seulement s'il est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à (5.19), c'est-à-dire si l'application $\lambda(\mu)$ qui l'induit de (5.19) est un germe de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^k$. Le théorème 5.15 suit alors de la proposition 5.5. ■

Remarque 5.17.

1. Rappelons qu'en coordonnées polaires (θ, ρ) la famille $X_\lambda^{k,\pm}$ s'écrit :

$$X_\lambda^{k,\pm} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \Big(\lambda_0 + \lambda_1\rho^2 + \ldots + \lambda_{k-1}\rho^{2(k-1)} \pm \rho^{2k}\Big)\, \rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

2. Takens a établi un résultat plus fort que le théorème 5.14 en montrant que la famille est un déploiement versel au sens de ce que Takens définit comme la $(\mathcal{C}^\infty,\mathcal{C}^\infty)$-*équivalence faible* pour les familles de champs sur $\mathbb{R}^2$. On dit que de telles familles X_μ, Y_μ sont faiblement $(\mathcal{C}^\infty,\mathcal{C}^\infty)$-équivalentes s'il existe un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, $(z,\mu)\mapsto\big(h(z,\mu),\varphi(\mu)\big)$, tel que pour tout μ le difféomorphisme $z\mapsto h(z,\mu)$ envoie les points singuliers et les orbites périodiques de X_μ sur ceux de $Y_{\varphi(\mu)}$, en respectant leur nature attractante ou expansive (les périodes ne sont pas nécessairement respectées).
3. La singularité de Hopf-Takens de codimension k correspond à une singularité $\mathcal{HT}^k$ au sens du chapitre 2, définie dans l'espace $j^{2k+1}V^2$ des $(2k+1)$-jets de champs en $0\in\mathbb{R}^2$. La famille $X_\lambda^{k,\pm}$ est transverse à $\mathcal{HT}^k$ en un seul point (car la singularité $\mathcal{HT}^k$ est une sous-variété de codimension $k+2$ dans $j^{2k+1}V^2$). Il est facile de vérifier à l'aide du théorème 5.14 que cette propriété de transversalité caractérise les déploiements versels des singularités de Hopf-Takens de codimension égale à k.
4. Il a été montré que la famille $X_\lambda^{k,\pm}$ n'est pas verselle au sens de la $(\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^\infty)$-équivalence, ni même au sens de la $(\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^0)$-équivalence.

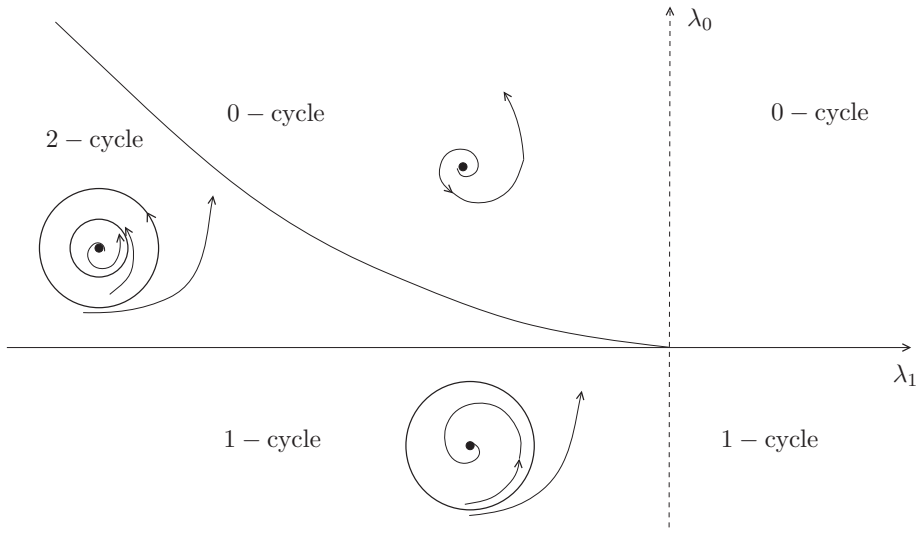


Figure 5.10. Bifurcation de Hopf-Takens de codimension 2. Cas $X_\lambda^{2,+}$.

On a décrit la famille verselle $X_\lambda^{1,\pm}=H_\lambda^\pm$, $\lambda\in\mathbb{R}$, dite famille de Andronov-Hopf, dans l'exemple 4 du paragraphe 2. On trouvera, dans la figure 5.10, le diagramme de bifurcation de la famille de Hopf-Takens pour $k=2$ et $X_\lambda^{2,+}$. Ce diagramme contient deux lignes de bifurcations : l'axe $\{\lambda_0=0\}$, le long duquel

on retrouve transversalement pour $\lambda_1 \neq 0$ une bifurcation de Andronov-Hopf, et l'arc de parabole $\{\lambda_0 = \frac{\lambda_1^2}{4} \mid \lambda_1 \leq 0\}$, qui est transversalement une bifurcation de type selle-nœud $\mathcal{SN}^1$ pour une orbite périodique semi-stable (c'est-à-dire dont l'application de Poincaré est semi-stable, autrement dit une singularité de type selle-nœud de codimension 1 ; voir définition 5.7). Ces deux lignes de bifurcation séparent $\mathbb{R}^2$ en trois régions ouvertes dans lesquelles on trouve respectivement $0, 1$ et 2 orbites périodiques hyperboliques entourant l'origine. La discussion dépend ensuite essentiellement du signe $\pm$ comme dans le cas $k = 1$.

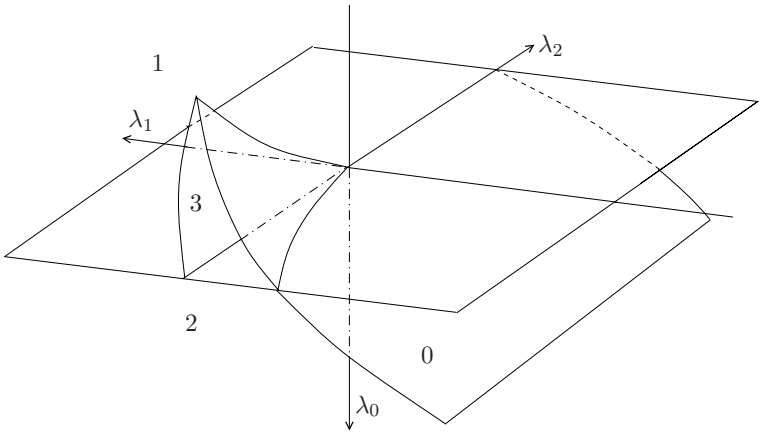


Figure 5.11. Diagramme de la bifurcation de Hopf-Takens de codimension 3.

Pour une codimension k quelconque, le théorème 5.14 montre que le diagramme de bifurcation du déploiement versel est celui des *racines positives* du polynôme impair versel de degré $2k+1$:

$$P_I^{k,\pm}(x,\lambda) = \lambda_0 x + \lambda_1 x^3 + \ldots + \lambda_{k-1} x^{2k-1} \pm x^{2k+1},$$

où le symbole I dans $P_I^{k,\pm}$ signifie que l'on considère un polynôme impair. Le passage par $0 \in \mathbb{R}$ doit être considéré comme une bifurcation (elle correspond à une bifurcation d'une orbite périodique par l'origine de $\mathbb{R}^2$). La strate correspondante est donnée par $\{\lambda_0 = 0\}$. Les autres strates sont les bifurcations du polynôme de degré k : $\lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{k-1} X^{k-1} \pm X^k$ (pour $x > 0$, on peut diviser le polynôme par x pour obtenir un polynôme en x^2, puis utiliser la variable $X = x^2$). Cette famille est induite de la famille de la catastrophe élémentaire à $k-1$ paramètres : $\mu_0 + \mu_1 Y + \ldots + \lambda_{k-2} Y^{k-2} \pm Y^k$. Une difficulté mineure est de mettre en place ce diagramme dans l'espace des paramètres $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1})$, simultanément avec la surface $\{\lambda_0 = 0\}$ et de tenir compte de la condition $x \geq 0$. On a représenté dans la figure 5.11 le diagramme de bifurcation pour $k = 3$ et le signe $+$.

This page intentionally left blank

6

COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE DES BIFURCATIONS

Dans ce chapitre, nous allons donner plus de résultats sur les bifurcations de champs de dimension deux et essayer de faire le point sur l'état des connaissances dans ce domaine.

Nous complétons le chapitre 5 en présentant les singularités de toute codimension avec leurs déploiements versels, associées à deux filtrations particulières de l'espace des jets de champs de vecteurs, que l'on peut définir à partir des notions introduites dans ce chapitre précédent : la filtration des singularités de type selle-nœud et la filtration des singularités de type Hopf-Takens.

Les notions introduites dans le chapitre précédent sont cependant insuffisantes pour étudier par exemple toutes les bifurcations de codimension inférieure à deux. En effet, l'étude des déploiements de la singularité de Bogdanov-Takens de codimension deux nécessite la mise en œuvre de nouveaux outils : un changement d'échelle sur les variables d'espace et les paramètres et des résultats sur la théorie des intégrales abéliennes dont nous dirons quelques mots à la fin du chapitre. Cette singularité de Bogdanov-Takens correspond à la première strate d'une troisième filtration particulière que nous présentons brièvement.

Nous présenterons ensuite quelques résultats sur les bifurcations de polycycles hyperboliques. Ces résultats sont basés sur les propriétés des développements asymptotiques (non différentiables) de l'application de retour au voisinage du polycycle. Nous présenterons brièvement ces propriétés et les résultats que l'on peut en déduire.

La désingularisation par éclatement est le principal nouvel outil que nous présentons en détail dès le début de ce chapitre. Cette désingularisation a tout

d'abord était introduite pour étudier les singularités de champs de vecteurs du plan puis cette méthode d'éclatement a été étendue aux déploiements. D'une certaine façon, on peut voir l'éclatement d'un déploiement comme une extension du changement d'échelle utilisé dans l'étude des déploiements de Bogdanov-Takens.

La désingularisation permet de réduire, par une suite finie d'éclatements, toute singularité (algébriquement isolée) à des singularités élémentaires, pour lesquelles on sait tout dire. Cette désingularisation des singularités est la première étape dans la preuve du problème de Dulac démontré dans les années 1990 par Écalle et Ilyashenko : tout champ de vecteurs analytique sur la sphère a un nombre fini de cycles limites (il est évidemment hors de question ici d'esquisser les étapes ultérieures de cette preuve). La désingularisation des déploiements permet d'aborder l'étude des bifurcations de polycycles dégénérés : le plus simple de ces polycycles est le lacet cuspidal et nous dirons quelques mots sur l'étude des déploiements de ce lacet.

Le chapitre se poursuit par une présentation du seizième problème de Hilbert, qui pose la question de la finitude du nombre de cycles limites des champs de vecteurs polynomiaux d'un degré fixé. Ce problème est intimement lié à l'étude générale des bifurcations. Un cas particulier est le seizième problème de Hilbert infinitésimal qui concerne les cycles limites bifurquant au voisinage des champs hamiltoniens. Via la formule de Poincaré-Pontriaguine, cette question se ramène à l'étude de la finitude du nombre des zéros des intégrales abéliennes. Nous indiquerons quelques résultats récents obtenus sur ce vaste sujet.

Enfin, nous concluons ce chapitre par un exemple montrant la difficulté de mettre en place une théorie de bifurcation globale pour les familles de champs de vecteurs, ne serait-ce que sur la sphère S^2.

6.1. Désingularisation

Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ défini sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $X(0) = 0$. Le but de la désingularisation est d'étudier le germe de X en lui associant un nouveau champ $\bar{X}$ sur un nouvel espace E. L'espace E est difféomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ et une application singulière $\mathcal{C}^\infty$ d'éclatement $\Phi : E \mapsto \mathbb{R}^n$, envoie la sphère $S^{n-1} \times \{0\}$ (où $\{0\} \subset \mathbb{R}^+$ est le sous-ensemble $\mathbb{R}^+$ réduit au point 0 de $\mathbb{R}^+$), sur l'origine de $\mathbb{R}^n$. L'application Φ est un difféomorphisme de $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \setminus S^{n-1} \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On définit alors un champ $\bar{X}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $W = \Phi^{-1}(U)$. Ce champ $\bar{X}$ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent en dehors de $S^{n-1} \times \{0\}$ au relèvement $\Phi_*^{-1}(X)$ sur W. En adaptant les poids définis ci-après, on espère que le champ $\bar{X}$ aura sur $S^{n-1} \times \{0\}$, des singularités plus simples que celles de X en $0 \in \mathbb{R}^n$.

Explicitement, on considère l'application Φ suivante :

Définition 6.1. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On appelle *éclatement quasi homogène* de poids $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ l'application de $\Phi : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Phi((\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \rho) = (\rho^{\alpha_1}\bar{x}_1, \ldots, \rho^{\alpha_n}\bar{x}_n). \tag{6.1}$$

Comme $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in S^{n-1}$, on prend : $\bar{x}_1^2 + \ldots + \bar{x}_n^2 = 1$. La sphère $S^{n-1} \times \{0\}$ est appelée *lieu critique* de l'éclatement.

On appelle *éclatement standard* l'éclatement avec les poids $(1, 1, \ldots, 1)$.

On a alors le résultat suivant :

Lemme 6.1. *Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, défini au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $X(0) = 0$ et Φ l'application d'éclatement (6.1) de poids $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que le champ $\rho^s \Phi_*^{-1}(X)$, qui est défini et $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $S^{n-1} \times \{0\}$ dans $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ et en dehors de $S^{n-1} \times \{0\}$, s'étende de façon $\mathcal{C}^\infty$ aux points de $S^{n-1} \times \{0\}$, en un champ de vecteurs divisible par ρ.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat au voisinage de chaque point de $S^{n-1} \times \{0\}$. Soit donc $(\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0) \in S^{n-1}$ et supposons pour fixer les idées que $\bar{x}_n^0 > 0$ (les autres cas s'y ramènent par permutation des coordonnées de $\mathbb{R}^n$). Dans l'ouvert U_n de S^{n-1} défini par la condition $\{\bar{x}_n > 0\}$, on peut utiliser la carte $\psi_n : U_n \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$ donnée par $v_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_n}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On notera par $\varphi_n(v_1, \ldots, v_{n-1})$ la paramétrisation de U_n définie par l'application inverse de ψ_n. Explicitement φ_n est donnée par $\bar{x}_i = \frac{v_i}{\sqrt{1+v_1^2+\ldots+v_{n-1}^2}}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $\bar{x}_n = \frac{1}{\sqrt{1+v_1^2+\ldots+v_{n-1}^2}}$.

Comme φ_n est un difféomorphisme, il suffit de montrer le résultat pour l'application $\Psi = \Phi \circ (\varphi_n, \mathrm{Id})$ (ici Id est l'application identique sur l'axe des ρ). On a : $\Psi(v_1, \ldots, v_{n-1}) = (\rho^{\alpha_1}v_1, \ldots, \rho^{\alpha_{n-1}}v_{n-1}, \rho^{\alpha_n})$. Posons

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} + B(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

et calculons

$$\hat{X} = \Psi_*^{-1}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{A}_i(v_1, \ldots, v_{n-1}, \rho)\frac{\partial}{\partial v_i} + \hat{B}(v_1, \ldots, v_{n-1}, \rho)\frac{\partial}{\partial \rho}$$

pour $\rho > 0$. On a

$$\alpha_i \rho^{\alpha_i - 1} \hat{B}(v_1, \ldots, v_{n-1}, \rho) + \rho^{\alpha_i} \hat{A}_i(v_1, \ldots, v_{n-1}, \rho) = A_i(\rho^{\alpha_1} v_1, \ldots, \rho^{\alpha_{n-1}} v_{n-1}, \rho^{\alpha_n}) \quad (6.2)$$

pour $i = 1, \ldots, n-1$, et

$$\alpha_n \rho^{\alpha_n - 1} \hat{B}(v_1, \ldots, v_{n-1}, \rho) = B(\rho^{\alpha_1} v_1, \ldots, \rho^{\alpha_{n-1}} v_{n-1}, \rho^{\alpha_n}). \quad (6.3)$$

Le résultat suit facilement de ces expressions. Il suffit de prendre $s > \mathrm{Sup}_i\{\alpha_i\}$. Comme $X(0) = 0$, les fonctions dans les membres de droite de (6.2) et (6.3) sont divisibles par ρ et le champ $\rho^s \widehat{X}$ s'étend en un champ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et divisible par ρ. ■

Comme le champ $\rho^s \widehat{X}$ défini dans le lemme 6.1 est divisible par ρ, il est tangent au lieu critique $S^{n-1} \times \{0\}$. Il est intéressant de considérer le champ obtenu, en prenant la valeur minimale de s pour laquelle on a un champ $\mathcal{C}^\infty$ avec cette propriété de tangence :

Définition 6.2. On appelle *champ désingularisé de X (ou éclaté de X)* le champ $\bar{X} = \rho^s \widehat{X}$ où s est la valeur minimale *dans* $\mathbb{Z}$, pour laquelle le $\rho^s \widehat{X}$ s'étende en un champ tangent au lieu critique et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 6.1. Le lemme 6.1 a montré l'existence d'un nombre s dans $\mathbb{N}$, tel que le champ $\rho^s \hat{X}$ soit champ tangent au lieu critique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais il peut se faire que la valeur de s optimale, c'est-à-dire la plus petite, soit négative ; on en verra un exemple ci-après.

Nous allons maintenant appliquer ces considérations générales aux germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ ainsi qu'aux déploiements de tels germes.

6.1.1. Désingularisation des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$

Dans ce cas, on peut paramétrer S^1 par l'angle θ, et l'application d'éclatement à poids (α_1, α_2) est l'application $\Phi(\theta, \rho) = (\rho^{\alpha_1} \cos\theta, \rho^{\alpha_2} \sin\theta)$, qui se réduit à l'application de passage en coordonnées polaires pour l'application d'éclatement standard. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 6.1, on peut remplacer cette formule unique par des formules dans des cartes : $x = \pm\rho^{\alpha_1}$, $y = \rho^{\alpha_2} t$ et $x = \rho^{\alpha_1} t$, $y = \pm\rho^{\alpha_2}$, formules qui ont l'avantage d'être algébriques. On trouvera tous les détails sur ces formules d'éclatements en dimension 2 dans [23], [24] ou [57] par exemple.

Remarque 6.2. Pour l'éclatement standard Φ, on peut vérifier sans peine (voir *[23]*) que le champ éclaté s'écrit $\bar{X} = \rho^s \Phi_*^{-1}(X)$ avec $s = val_0(X) - 1$, où $val_0(X)$ est la *valuation* de X en $0 \in \mathbb{R}^2$, définie comme le plus petit entier k tel que $j^k X(0) \neq 0$. Par exemple, si $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, on a $s = 0$ et $\bar{X} = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}$. Si $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, on a $s = 0$ et $\bar{X} = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Pour faire comprendre le mécanisme de l'éclatement et son utilité, nous allons commencer par décrire un exemple.

Exemple 1. On considère le champ $X = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$ sur lequel on va faire un éclatement standard. Comme on l'a expliqué au paragraphe II-1.2, le plus simple pour calculer $\hat{X} = \Phi_*^{-1}(X)$ est de faire intervenir implicitement en chaque point (x, y) un arc de trajectoire $\big(x(t), y(t)\big)$. Si $X = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, on écrit alors que : $\dot{x} = A(x, y), \dot{y} = B(x, y)$. On obtient alors un arc de trajectoire du champ $\hat{X}$ par substitution de $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

Ici : $\dot{x} = x^2 - y^2$ et $\dot{y} = 2xy$. Par substitution, on obtient :

$$\dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

et

$$\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta = 2\rho^2\cos\theta\sin\theta.$$

Ce qui donne

$$\hat{X} = \rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho^2\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho},$$

et donc :

$$\bar{X} = \frac{1}{\rho}\hat{X} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Le champ $\bar{X}$ a deux points singuliers, situés sur le cercle $S^1 \times \{0\}$, l'un $C = (0, 0)$ et l'autre en $B = (\pi, 0)$. Ces deux points sont hyperboliques. Le premier est une source et le second est un puits (par exemple les axes propres en C sont les deux axes $O\theta, O\rho$ avec la même valeur propre égale à 1). On en déduit immédiatement le portrait de phase de $\bar{X}$ et donc celui de X en utilisant l'application Φ qui écrase le cercle $S^1 \times \{0\}$ sur le point $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ (figure 6.1).

Sur le modèle de cet exemple, on peut établir un résultat général de désingularisation des champs de vecteurs en dimension 2. Ce résultat, établi par Seidenberg, utilise la définition suivante :

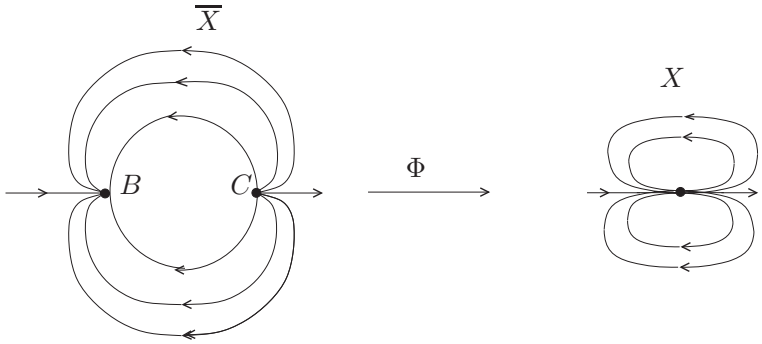


Figure 6.1

Définition 6.3. Soit X un champ de classe $\mathcal{C}^\infty$, défini au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$ et tel que $X(0) = 0$. Posons $X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$. Soit $\mathcal{I}(P,Q)$ l'idéal engendré par P, Q dans l'anneau $\mathcal{O}_2^\infty$ des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de cet anneau (formé de tous les germes de fonctions nulles en 0). On dit que 0 est une singularité algébriquement isolée de X s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{I}(P,Q)$.

Remarque 6.3. $\mathcal{M}^k$, produit k fois de l'idéal $\mathcal{M}$ par lui-même, est l'idéal des germes de fonctions ayant un $(k-1)$-jet nul en $0 \in \mathbb{R}^2$. On peut montrer que la condition d'être algébriquement isolé ne dépend que d'un jet fini de X. Le fait de n'être pas algébriquement isolé est une condition de codimension infinie dans l'espace des jets infinis. Cela signifie la chose suivante. Si Π_k est la projection de l'espace $j^\infty V^2$ des jets infinis de champs en $0 \in \mathbb{R}^2$ sur l'espace $j^k V^2$ des k-jets, alors il existe une suite croissante d'entiers :

$$\ldots < n_k < n_{k+1 < \ldots}$$

et pour chaque n_k un ensemble algébrique σ_k de codimension k dans $j^{n_k}V_2$, tel que tout germe de champ non algébriquement isolé soit contenu dans l'intersection supposée décroissante : $\cap_k \Pi_{n_k}^{-1}(\sigma_k)$. Les germes non-algébriquement isolés sont donc très rares. Ainsi, il suit du théorème de transversalité de Thom (cf. chapitre 2) que toute famille générique, à un nombre quelconque mais fini de paramètres, ne contient que des singularités algébriquement isolées.

Cette notion est évidemment valable pour les germes de champs analytiques réels ou complexes (holomorphes), algébriques et même pour les champs formels. Pour un champ holomorphe, être algébriquement isolé pour une singularité est équivalent à être topologiquement isolé.

On peut itérer l'opération d'éclatement : si le champ éclaté $\bar{X}$ a une singularité en un point $p \in S^1 \times \{0\}$, on prendra des coordonnées locales (u, v) en p, avec $p = \{u = v = 0\}$ et on pourra éclater à nouveau ces coordonnées. On peut ainsi définir des suites (finies) d'éclatements successifs : $\Phi_i : E_{i+1} \mapsto E_i$, à partir de $\Phi_1 = \Phi : E_1 = E = S^1 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^2$. Les ensembles éclatés successifs sont les ensembles semi-algébriques réels, chacun homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^+$. Le bord ∂E_i de E_i pour $i \geq 2$, est formé de i arcs transverses en leurs extrémités (figure 6.2).

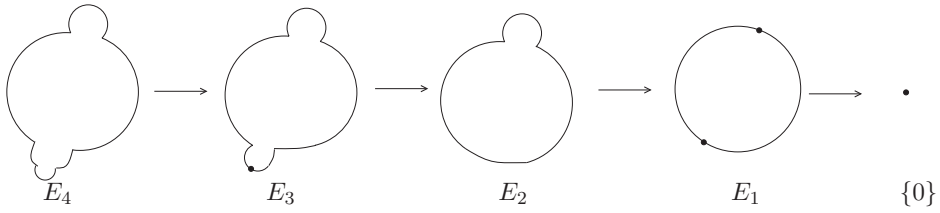


Figure 6.2

On définit par récurrence un champ éclaté $\bar{X}_i$ dans E_i, au voisinage du bord ∂E_i. On peut maintenant énoncer le théorème de Seidenberg :

Théorème 6.1. *Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, défini au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$, avec $X(0) = 0$. Supposons que 0 soit une singularité algébriquement isolée de X. Alors il existe une suite finie de k éclatements : $E_k \to E_{k-1} \to \ldots \to E_1 \to \mathbb{R}^2$ telle que le dernier champ éclaté $\bar{X}_k$ n'ait que des zéros hyperboliques ou partiellement hyperboliques. Les zéros partiellement hyperboliques peuvent former des arcs de ∂E_k ou bien être isolés, avec un jet non nul en restriction à une variété centrale.*

Définition 6.4. En dimension n quelconque, un germe de champ en un point singulier est dit *partiellement hyperbolique* si au moins une des valeurs propres de son linéarisé en ce point a une partie réelle non nulle (nous avons déjà utilisé cette terminologie au début du paragraphe 5.4.1 sur la réduction à une variété centrale). Implicitement, on suppose évidemment que le point n'est pas hyperbolique (on devrait dire le germe !), c'est-à-dire que le linéarisé du champ à la singularité considérée a aussi une valeur propre de partie réelle nulle.

En dimension 2, et seulement dans le cas de cette dimension, un point partiellement hyperbolique est un point qui a une valeur propre réelle non nulle et une valeur propre nulle. Toujours en dimension 2, on appelle point *semi-hyperbolique* un point partiellement hyperbolique qui est isolé. Par exemple, dans l'énoncé du théorème 6.1, on a des points semi-hyperboliques (isolés) et des arcs de points partiellement hyperboliques (non isolés). On rappelle qu'un zéro x_0 de X est isolé si ce point est l'unique zéro de X dans un voisinage de x_0.

Le théorème de Seidenberg a été énoncé sous la forme dans laquelle nous le donnons par Dumortier. En fait, Dumortier en a démontré une version plus générale, la condition d'être algébriquement isolée étant remplacée par une condition plus générale que nous ne donnerons pas, dite *condition de Lojaciewicz* (voir [23],[24]). D'autre part, Dumortier a montré que si le germe algébriquement isolé X admettait une trajectoire tendant vers l'origine avec une direction limite, alors ce champ était de détermination finie en $0 \in \mathbb{R}^2$. Cela signifie qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de X) tel que tout champ avec le même n-jet que X en $0 \in \mathbb{R}^2$, est localement (topologiquement) conjugué avec X.

Pour démontrer le théorème de Seidenberg, on peut se contenter d'éclatements standard. Cependant, il est en général intéressant d'utiliser un éclatement quasi homogène plus général et mieux adapté au germe à désingulariser. Cela permettra éventuellement de diminuer le nombre d'éclatements à effectuer.

Exemple 2. Le germe de Bogdanov-Takens s'inscrit dans le cadre général des formes normales (5.16). Il s'écrit :

$$y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.4}$$

et il nécessite la succession de trois éclatements standard pour être désingularisé. Par contre, inspiré par l'observation que le champ $y\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial}{\partial y}$ est un champ hamiltonien, de fonction hamiltonienne $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$, il est naturel de tenter l'éclatement

$$x = \rho^2 \cos\theta,\ y = \rho^3 \sin\theta.$$

On obtient alors

$$\bar{X} = \frac{1}{\rho}\hat{X} = \frac{2c^3 + 3c^2 - 3 + O(\rho)}{2c^2 + 3s^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + cs\frac{1 + c + O(\rho)}{2c^2 + 3s^2}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

où l'on a posé $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$.

Considérons le numérateur $N(\theta)$ de la composante $n(\theta)$ de $\frac{\partial}{\partial\theta}$, pour $\rho = 0$. C'est une fonction de θ qui est composée de la fonction $c = \cos\theta$ avec le polynôme $P(c) = 2c^3 + 3c^2 - 3$. Ce polynôme du troisième degré a deux points critiques en $c = -1$ et $c = 0$. Il est donc strictement décroissant de -1 à 0, puis strictement croissant de 0 à $+\infty$. Comme $P(-1) = -2$, ce polynôme n'a pas de racine sur l'intervalle $[-1, 0]$. Comme $P(0) = -3$ et $P(1) = 2$, il existe une et une seule racine de $P(c)$ pour un $c_0 \in]0, 1[$. Les racines de $N(\theta) = 0$ sont les racines de $\cos\theta = c_0$, à savoir $\pm\theta_0$ pour un $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Les deux racines de $N(\theta) = 0$ sont simples. *La composante $n(\theta)$ a donc $\pm\theta_0$ comme seules racines, qui sont toutes les deux simples car on montre facilement que :* $\frac{dn}{d\theta}(-\theta_0) = -\frac{dn}{d\theta}(\theta_0) > 0$.

Soit $r(\theta)$ la composante de $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$, pour $\rho = 0$. On a :

$$r(\theta_0) = -r(-\theta_0) = \cos\theta_0 \sin\theta_0 \frac{1+\cos\theta_0}{2\cos^2\theta_0 + 3\sin^2\theta_0} > 0.$$

Le champ $\bar{X}$ n'a que deux points singuliers $c_\pm = (\pm\theta_0, 0)$. Comme les axes propres en ces deux points sont les axes de coordonnées $O\theta$ et $O\rho$, les valeurs propres en c_+ sont égales à $\frac{dn}{d\theta}(\theta_0) < 0$ et $r(\theta_0) > 0$. Les valeurs propres en c_- sont égales à $\frac{dn}{d\theta}(-\theta_0) > 0$ et $r(-\theta_0) < 0$. *Ces points sont donc des points de selle hyperboliques.* Le champ $\bar{X}$ est désingularisé et son portrait de phase se déduit immédiatement des signes des valeurs propres aux points $c_\pm$. On déduit de ce portrait de phase celui de X en écrasant le cercle $S^1 \times \{0\}$ sur l'origine de $\mathbb{R}^2$: on observe que X a deux séparatrices ayant chacune l'origine comme un de leurs ensembles limites, ce qui donne un dessin en forme de cusp (figure 6.3). Remarquez que cette étude est indépendante du signe $\pm$ dans (6.4).

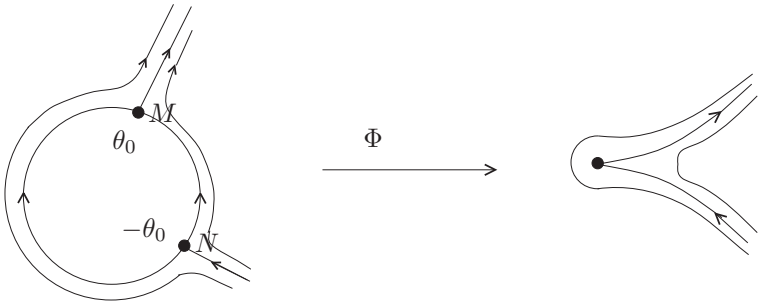


Figure 6.3. Éclatement du germe de Bogdanov-Takens en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

6.1.2. Désingularisation des déploiements de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$

Cette section ne prétend donner qu'un aperçu d'une théorie qui est d'ailleurs encore largement en cours de gestation. On pourra trouver plus de détails dans [57].

Pour appliquer l'éclatement à un déploiement

$$X_\lambda = P(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial y}$$

en $0 \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, *il suffit de considérer ce déploiement comme un champ $\mathcal{X}$ défini au voisinage de* $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p+2}$. L'équation

différentielle du champ $\mathcal{X}$ est formée en rajoutant aux deux lignes

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda),\ \ \dot{y} = Q(x, y, \lambda),$$

les p lignes triviales

$$\dot{\lambda}_i = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p.$$

On peut alors lui appliquer un éclatement donné par (6.1) avec $n = p + 2$. On appellera cet éclatement : *éclatement global du déploiement* pour le distinguer de l'éclatement en (x, y) décrit dans la sous-section précédente. On désignera par $\bar{\mathcal{X}}$ *le champ éclaté.*

Pour mieux mettre en évidence la différence entre les deux variables d'espace (x, y) et le paramètre, nous allons écrire cet éclatement :

$$\Phi\big(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p, u\big) = (u^{\alpha}\bar{x}, u^{\beta}\bar{y}, u^{\gamma_1}\bar{\lambda}_1, \ldots, u^{\gamma_p}\bar{\lambda}_p), \tag{6.5}$$

avec $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p) \in S^{p+1},\ u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$ et un système de poids

$$(\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in \mathbb{N}^{p+2}.$$

On appelle maintenant u le paramètre « radial » de l'éclatement pour éviter une éventuelle confusion avec le paramètre radial ρ des coordonnées polaires, utilisé dans la sous-section précédente.

Exemple. Considérons le déploiement de Hopf versel :

$$X_\lambda = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (\lambda + x^2 + y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

On considère l'éclatement $x = u\bar{x}, y = u\bar{y}, \lambda = u^2\bar{\lambda}$. En fait, l'usage de l'éclatement global n'est pas utile pour étudier ce déploiement. Il suffit pour l'étudier de passer en coordonnées polaires. *Nous ne décrivons l'éclatement du déploiement que dans un souci pédagogique, pour expliquer la méthode sur un cas d'école très simple.*

Comme plus haut pour le germe de Bogdanov-Takens, mais en changeant légèrement de notation, désignons par $\mathcal{X}$ le champ en dimension trois défini par la famille X_λ, et par $\bar{\mathcal{X}}$ le champ éclaté défini sur $S^2 \times \mathbb{R}^+$.

On remplace la sphère S^2 par un recouvrement de cartes projectives (une des coordonnées de l'éclatement est supposée égale à ± 1). Dans chacune de ces cartes, on obtiendra un champ différent du champ éclaté $\bar{\mathcal{X}}$ par multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive (c'est-à-dire un champ $\mathcal{C}^\infty$-équivalent au champ éclaté). On a une fonction différente dans chaque carte qu'il est inutile de connaître

explicitement, car ces fonctions multiplicatives n'interviennent pas dans les études de portraits de phase.

Les cartes de ce recouvrement sont classées en *cartes (dans la) direction famille* et *cartes (dans la) direction (espace de) phase* selon que la coordonnéee choisie égale à ± 1 est $\bar{\lambda}$ ou bien $\bar{x}, \bar{y}$.

(1) Cartes direction famille. Une première carte est obtenue en prenant

$$\bar{\lambda} = -1,\ (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D},\ u \sim 0 \in \mathbb{R}^+.$$

$\bar{D}$ est un disque (arbitrairement grand) dans le plan $\mathbb{R}^2$ des coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$. On dit que cette carte est une *carte direction famille* car le champ $\bar{\mathcal{X}}$, résultat de l'éclatement du champ $\mathcal{X}$, y est représenté par une famille de paramètre $u \sim 0$:

$$\bar{X}_u = -\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{y}} + u^2(-1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2)\left(\bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right).$$

Pour $u \neq 0$, le champ $\bar{X}_u$ a une orbite périodique fixe de rayon égal à 1. On retrouve l'orbite de rayon $\sqrt{-\bar{\lambda}}$ en revenant aux coordonnées initiales par Φ.

Pour couvrir toute la direction famille, on doit aussi considérer une seconde carte direction famille obtenue en prenant $\bar{\lambda} = 1$. Comme rien d'intéressant n'apparaît dans cette carte, on ne développera pas l'étude.

(2) Cartes direction phase. Pour recouvrir tout l'espace d'éclatement, on doit ajouter aux cartes direction famille un voisinage du cercle $\{\bar{\lambda} = 0\} \subset S^2$. On doit prendre *a priori* plusieurs cartes pour recouvrir le cercle. Ces cartes seraient données par : $\bar{x} = \pm 1$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ et $\bar{y} = \pm 1$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$. On préfère, comme on l'a fait plus haut, paramétrer le cercle par un angle θ. Cela revient à considérer les formules

$$x = u\cos\theta, \quad y = u\sin\theta, \quad \lambda = u^2\bar{\lambda} \tag{6.6}$$

avec $\theta \in S^1, \bar{\lambda} \sim 0 \in \mathbb{R}$ et $u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$. Maintenant, le champ éclaté $\bar{\mathcal{X}}$ n'est plus représenté par une famille de champs de $\mathbb{R}^2$, mais est un champ de $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, de coordonnées $(\theta, \bar{\lambda}, u)$ (avec l'intégrale première $u\lambda = \text{Const.}$). L'équation du champ $\bar{\mathcal{X}}$, obtenue en substituant (6.6) dans l'équation de $\mathcal{X}$, s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\bar{\lambda}} = -2u^2\bar{\lambda}(1 + \bar{\lambda}) \\ \dot{u} = u^3(1 + \bar{\lambda}) \end{cases}. \tag{6.7}$$

Pour $\bar{\lambda} = 0$, on retrouve l'éclatement du germe X_0 défini dans l'espace de phase (x, y), d'où le nom donné aux cartes de ce type. Sur le cylindre $\{u = 0\}$, on a le champ constant $\frac{\partial}{\partial\theta}$ au voisinage du cercle $\{u = \bar{\lambda} = 0\}$, qui peut être vu comme le cercle à l'infini du plan $\{u = 0\}$, paramétré par $(\bar{x}, \bar{y})$ dans lequel on avait choisi le disque $\bar{D}$ dans la carte direction famille. On peut reconstituer très facilement le champ tri-dimensionel $\bar{\mathcal{X}}$ à partir de ces deux études particulières de dimension 2 (figure 6.4).

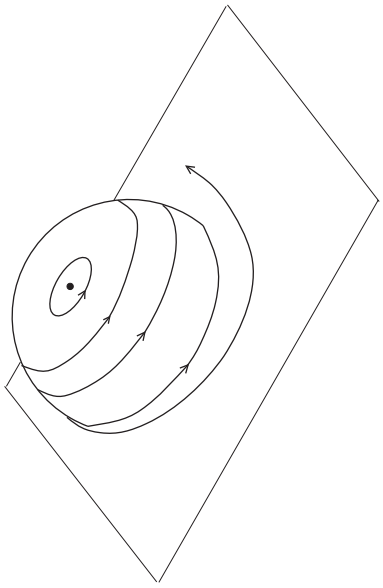


Figure 6.4. Désingularisation de la bifurcation de Hopf.

Voici maintenant un exemple plus intéressant, à deux paramètres, celui du déploiement de Bogdanov-Takens :

$$X_{\mu,\nu} = y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(x^2 + \mu + y(\nu \pm x)\Big)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Nous expliquerons dans le paragraphe 2 pourquoi ce déploiement est important. C'est en fait un déploiement versel pour un type de singularité de codimension 2, choisi avec un souci de simplicité, en tronquant à un ordre minimal la forme normale d'un déploiement quelconque de la singularité.

Pour étudier ce déploiement, en prenant en considération la quasi homogénéité de sa partie hamiltonienne : $y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(x^2 + \mu\Big)\frac{\partial}{\partial y}$, on utilise l'éclatement suivant

(prolongeant celui que l'on a utilisé plus haut pour le germe $X_{0,0}$) :

$$x = u^2\bar{x}, y = u^3\bar{y}, \mu = u^4\bar{\mu}, \nu = u\bar{\nu}. \tag{6.8}$$

Dans l'étude par *changement d'échelle* faite par Takens pour ce déploiement, on prend $u \sim 0 \in \mathbb{R}^+, (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D}$, un disque arbitrairement grand dans le plan de nouvelles coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$, puis $\bar{\mu} = -1, \nu \in I$, intervalle arbitrairement grand dans $\mathbb{R}$. On obtient de cette façon une nouvelle famille $\bar{X}_{u,\bar{\nu}}(\bar{x}, \bar{y})$ sur $\bar{D}$, paramétrée par $(u, \bar{\nu})$ comme spécifié plus haut (le choix $\bar{\mu} = -1$ correspond au fait qu'il suffit d'étudier le déploiement dans la direction $\mu < 0$, direction dans laquelle bifurque les points singuliers).

Le problème posé par ce choix est que le disque $\bar{D}$ correspond, pour tout $u > 0$, au disque $D_u = \{(u^2\bar{x}, u^3\bar{y}) \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D}\}$ dont la taille tend vers 0 avec u. Pour l'étude du déploiement dans un disque fixe D, on se tire d'affaire grâce à la théorie de Poincaré-Bendixson appliquée dans l'anneau $D \setminus D_u$: comme le champ $X_{\mu,\nu}$ n'y a ni orbite périodique, ni point singulier, on peut facilement montrer que le champ $X_{\mu,\nu}$ sur D est topologiquement équivalent au champ $X_{\mu,\nu}$ sur D_u.

Par contre, si l'on veut étudier un problème plus global, comme par exemple les bifurcations d'un *lacet cuspidal* formé de l'union, d'un point p de Bogdanov-Takens avec une orbite ayant p à la fois comme ensemble ω-limite et ensemble α-limite (figure 6.5), cette décroissance du disque d'étude D_u pose problème. En effet, on a besoin d'étudier l'application de Poincaré relative à une section ne passant pas par p, et cette section échappera au disque D_u dès que u sera trop petit.

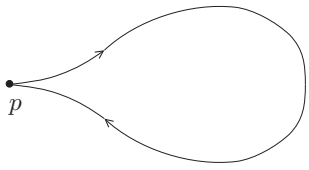


Figure 6.5. Lacet cuspidal.

Pour faire une telle étude, on aura besoin de l'éclatement global du déploiement. Cet éclatement global utilise les mêmes formules (6.8) que le changement d'échelle, mais avec un choix différent de l'espace dans lequel on choisit les variables d'éclatement. On prend maintenant globalement : $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^3$ et l'espace éclaté est $S^3 \times \mathbb{R}^+$. *Le changement d'échelle envisagé par Bogdanov et Takens se retrouve comme l'une des cartes de cet éclatement global : en fait une carte dans la direction famille.*

Voyons cela d'un peu plus près. Pour des raisons de présentation, on va modifier le choix des variables d'éclatement ainsi que leur domaine de définition (espace

éclaté). Précisément, on va opérer en deux étapes. Tout d'abord, on éclate l'espace des paramètres à l'origine. Pour des raisons de quasi homogénéité, on choisit :

$$\mu = v^4\bar{\mu},\ \nu = v^2\bar{\nu},$$

avec $v \sim 0 \in \mathbb{R}^+$ et $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^1$. On considère maintenant la famille induite par cette application d'éclatement. *On peut la voir comme une famille en dimension* 3 *de champs de vecteurs,* définie au voisinage de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, v) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, v \geq 0\}$ et de paramètre $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^1$.

On va maintenant éclater $\mathbb{R}^3_+$ à l'origine par les formules :

$$x = u^2\bar{x}, y = u^3\bar{y}, v = u\bar{v},$$

et on choisit $u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}) \in S^2_+ = \{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{v}^2 = 1, \bar{v} \geq 0\}$. L'espace éclaté de $\mathbb{R}^3_+$ est $E = S^2_+ \times \mathbb{R}^+$. Remarquez que cet espace est donc le même que la moitié de l'espace éclaté introduit dans l'exemple précédent (disons dans la direction $\lambda \geq 0$). Son bord est réunion de la demi-sphère $S^2_+ \times \{0\}$ et du plan troué $P = \{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \geq 1, \bar{v} = 0\}$, se raccordant le long du cercle $\gamma = \{x^2 + \bar{y}^2 = 1, \bar{v} = 0\}$. L'espace éclaté total est maintenant égal à $E \times S^1$, paramétré par $\big(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, (\bar{\mu}, \bar{\nu})\big)$. On peut composer évidemment les deux étapes de l'éclatement pour obtenir une application d'éclatement $\Phi : E \times S^1 \mapsto \mathbb{R}^4$, donnée par :

$$x = u^2\bar{x},\ y = u^3\bar{y},\ \mu = u^4\bar{v}^4\bar{\mu},\ \nu = u^2\bar{v}^2\bar{\nu}, \tag{6.9}$$

et l'on choisit $u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}) \in S^2_+, (\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^1$. On posera ($\bar{\mu} = \cos\theta$, $\bar{\nu} = \sin\theta$) avec $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Ce nouvel espace éclaté $E \times S^1$ est différent de l'espace éclaté $S^3 \times \mathbb{R}^+$ envisagé initialement. En fait, on peut obtenir la nouvelle application d'éclatement (6.9) par composition d'une application $E \times S^1 \mapsto S^3 \times \mathbb{R}^+$ avec l'ancienne application d'éclatement $S^3 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^4$. On préfèrera travailler directement avec cette nouvelle application d'éclatement car elle a l'avantage de produire un champ éclaté qui peut être vu comme *une famille à un paramètre de champs de dimension* 3 et non comme *un champ en dimension* 4, *a priori* irréductible à la dimension 3.

Comme dans l'exemple précédent, on étudie le champ éclaté $\bar{\mathcal{X}} = \frac{1}{u}\Phi_*^{-1}(\mathcal{X})$ dans différentes cartes de direction famille et phase. Nous n'allons pas détailler les calculs ici. On pourra les trouver dans [57].

En particulier, dans la carte de direction famille, obtenue en prenant $\bar{v} = 1$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D}$, où $\bar{D}$ est un disque arbitrairement grand, $u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$ et $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^1$, le champ éclaté est représenté par la famille d'équation différentielle :

$$\bar{X}_{u,\theta} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x}^2 + \cos\theta + u\bar{y}(\sin\theta \pm \bar{x}) \end{cases}. \tag{6.10}$$

Pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, cette famille est $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalente à la famille étudiée par Bogdanov et Takens. On cherche une telle équivalence de la forme :

$$\bar{x} = AX,\ \bar{y} = BY,\ u = CU,$$

pour des coefficients A, B, C strictement positifs, à déterminer en fonction de θ. En reportant ces formules dans (6.10), on trouve l'équation différentielle :

$$\begin{cases} A\dot{X} = BY \\ B\dot{Y} = A^2X^2 + \cos\theta + BCUY(\sin\theta \pm AX) \end{cases},$$

qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{B}{A}Y \\ \dot{Y} = \frac{B}{A}\left[\frac{A^3}{B^2}X^2 + \frac{A}{B^2}\cos\theta + \frac{A^2C}{B}UY(\frac{\sin\theta}{A} \pm X)\right] \end{cases},$$

Pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ on a : $|\cos\theta| = -\cos\theta > 0$. En choisissant :

$$A = |\cos\theta|^{\frac{1}{2}},\ B = |\cos\theta|^{\frac{3}{4}},\ C = |\cos\theta|^{-\frac{1}{4}},$$

on a :

$$\frac{A^3}{B^2} = 1, \frac{A}{B^2}\cos\theta = -1, \frac{A^2C}{B} = 1, \frac{B}{A} = |\cos\theta|^{\frac{1}{4}} > 0$$

et donc une $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-équivalence de la famille (6.10) avec la famille :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = X^2 - 1 + UY(\xi \pm X) \end{cases}, \tag{6.11}$$

où le paramètre $\xi = \frac{\sin\theta}{|\cos\theta|^{\frac{1}{2}}}$ est pris dans un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ arbitrairement grand (ce qui est équivalent à prendre θ dans un intervalle fermé arbitraire dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$) et U est positif, voisin de 0.

Cette famille est, aux notations près, la famille étudiée par Bogdanov et Takens. C'est une U-perturbation d'un champ hamiltonien, et les orbites périodiques apparaissant pour $U \neq 0$ sont obtenues en utilisant la théorie des intégrales abéliennes. Pour cette famille, Bogdanov a montré qu'il apparaît au plus une orbite périodique. Nous dirons quelques mots de ce résultat dans le paragraphe 4.

En revenant à l'équation (6.10), on peut étudier le champ dans la carte de direction famille pour toutes les valeurs du paramètre θ. On voit en particulier que, pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, on a des bifurcations de selle-nœud de codimension 1, et que, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on n'a aucun point critique et le portrait de phase est trivial. On

trouvera plus de détails sur l'étude du déploiement de Bogdanov-Takens dans [57] par exemple.

Pour compléter l'étude du champ $\bar{\mathcal{X}}$, on considère la carte de direction phase obtenue en prenant $(\bar{x}, \bar{y}) \in S^1$, $\bar{v}, u \sim 0 \in \mathbb{R}^+$ et $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in S^1$. On obtient deux points singuliers hyperboliques (en dimension 3) M, N, sur le cercle $\bar{v} = u = 0$ (figure 6.3). En restriction au plan $\bar{v} = 0$, on retrouve l'éclatement du germe $X_{0,0}$ étudié dans l'exemple 2 du sous-paragraphe 6.1.1 et les points M, N sont les points hyperboliques que l'on avait trouvés dans la désingularisation. On pourra trouver les détails de l'étude dans [57].

On a représenté dans la figure 6.6 le portrait de phase sur ∂E pour la valeur $\theta = -\pi$ et, dans la figure 6.7, les portraits de phase obtenus sur S^2_+ pour les différentes valeurs de θ.

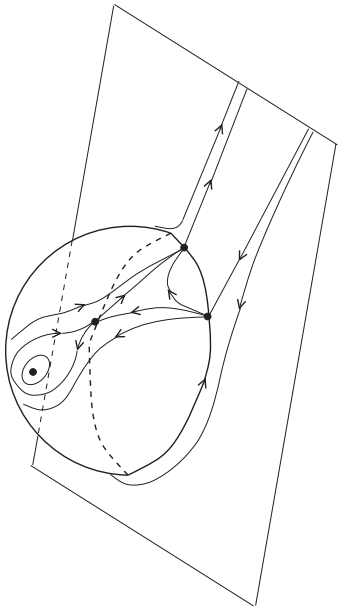


Figure 6.6

6.2. La bifurcation de Bogdanov-Takens

Une singularité X_0 de codimension 2 qui n'est ni de type selle-nœud, ni de type Hopf-Takens doit avoir un 1-jet nilpotent équivalent à $y\frac{\partial}{\partial x}$. Une telle singularité a une forme normale donnée par (5.16) :

$$y\frac{\partial}{\partial x} + (a_2 x^2 + \ldots)\frac{\partial}{\partial y} + (b_2 x^1 y + \ldots)\frac{\partial}{\partial y}.$$

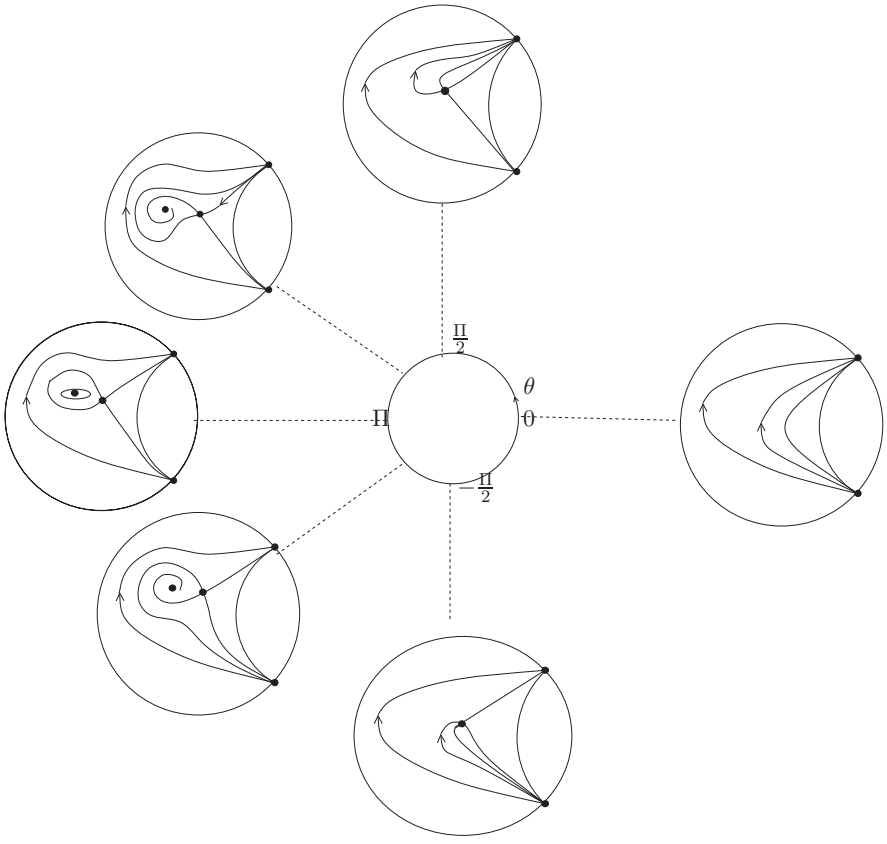


Figure 6.7

On suppose la condition générique $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut se ramener à $a_2 = 1$ et $b_2 = \pm 1$, c'est-à-dire à un champ X_0 de 2-jet égal à :

$$X_0 = y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.12}$$

Soit X_λ un déploiement quelconque de X_0 pour $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^p$. Il est facile de voir qu'il est $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty)$-conjugué au déploiement suivant, que nous noterons encore X_λ :

$$y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(g(x,\lambda) + yf(x,\lambda) + y^2 Q(x,y,\lambda)\Big)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.13}$$

où g, f, Q sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que

$$g(x,\lambda) = x^2 + \mu(\lambda) + o(x^2),$$

et

$$f(x,\lambda) = \nu(\lambda) + b(\lambda)x + o(x^2),$$

avec $\mu(0) = \nu(0) = 0$ et $b(0) = \pm 1$. En faisant un changement linéaire de la forme $(x,y) \mapsto \big(u(\lambda)x, v(\lambda)y\big)$, on peut supposer que $b(\lambda) = \pm 1$. Soit X_λ le déploiement (de X_0) associé aux fonctions f et g. Cette écriture du déploiement X_λ suggère que le déploiement $y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(x^2 + \mu + y(\nu \pm x)\Big)\frac{\partial}{\partial y}$ est un déploiement versel de X_0. Ce résultat a été établi indépendamment par Bogdanov et Takens (voir par exemple [57] où l'on pourra trouver d'autres références pour ce résultat) :

Théorème 6.2. *Le déploiement à deux paramètres μ, ν :*

$$X_{\mu,\nu} = y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(x^2 + \mu + y(\nu \pm x)\Big)\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.14}$$

est déploiement versel (au sens de la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence) de la singularité de Bogdanov-Takens, *singularité X_0 de 2-jet équivalent à $y\frac{\partial}{\partial x} + \Big(x^2 + y \pm x\Big)\frac{\partial}{\partial y}$.*

Une partie cruciale de la preuve est une étude d'intégrales abéliennes, étude sur laquelle on reviendra dans le sous-paragraphe 6.5.2.

Le diagramme du déploiement versel (6.14) est montré dans la figure 6.8 pour le cas $(-)$. Le champ $X_{\mu,\nu}$ n'a pas de point singulier si $\mu > 0$ et deux points singuliers pour $\mu < 0$: un point de selle $s_\mu = (\sqrt{-\mu}, 0)$ et un point qui est un foyer ou un nœud hyperbolique $e_\mu = (-\sqrt{-\mu}, 0)$. Le diagramme de bifurcation comprend quatre strates de codimension 1 : les deux demi-axes $\{\mu = 0\}$ pour $\nu > 0$ et $\nu < 0$ qui sont des lignes de bifurcation selle-nœud (de codimension 1). On a ensuite deux arcs de courbe H et C avec un contact quadratique avec l'axe $\{\mu = 0\}$. Ces courbes sont situées dans le quadrant $\{\mu < 0, \nu < 0\}$. La courbe H est une ligne de bifurcation de Hopf de codimension 1, et la courbe C est une ligne de bifurcation de connection de selle de codimension 1.

Lorsqu'on suit une droite verticale $\{\mu = \mu_0 < 0\}$, une petite orbite attractante bifurque lorsqu'on arrive sur la ligne H. Cette orbite croît en taille lorsqu'on parcourt l'intervalle entre H et C, et finit en une connection de selle lorsqu'on atteint la ligne C. L'orbite périodique disparaît alors et il n'existe plus d'orbite périodique lorsque (μ_0, ν) est au-dessus de C. On voit qu'au cours de cette variation du paramètre les deux séparatrices stable et instable à gauche du point de selle se sont croisées à la traversée de la courbe C. Le point délicat et qui nécessite un recours à la théorie des intégrales abéliennes est d'établir l'unicité de l'orbite périodique.

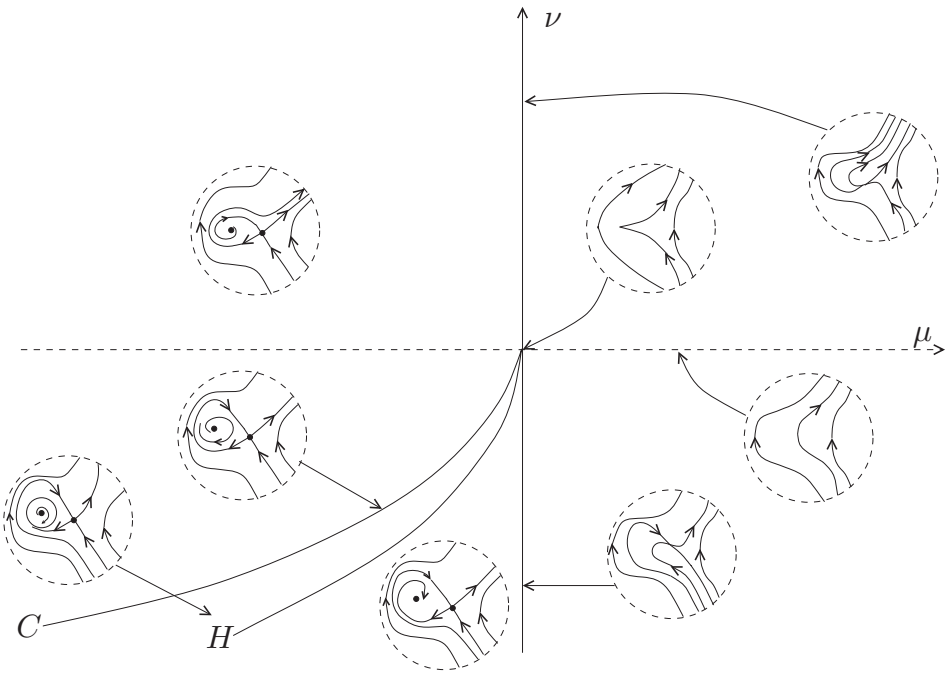


Figure 6.8

6.3. Déploiements versels des singularités de champs de vecteurs en dimension 2

Nous allons récapituler les résultats que nous avons obtenus jusqu'à maintenant sur les déploiements versels des singularités de champs de vecteurs en dimension 2, pour les mettre en situation de façon plus systématique, et aussi faire le point sur quelques problèmes ouverts (par abus de langage, on parle parfois de *déploiements versels de points singuliers* de champs de vecteurs en dimension 2).

Soit V l'espace des germes en $0 \in \mathbb{R}^2$ de champs de vecteurs X de classe $\mathcal{C}^\infty$, tels que $X(0) = 0$. Rappelons qu'un tel germe est également appelé *singularité* (de champs de vecteurs de dimension deux). On va désigner par j^kV, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'espace des jets d'ordre k des éléments de V. Pour k fini, on peut assimiler j^kV à l'espace vectoriel des champs polynomiaux, nuls en 0 et de degré inférieur ou égal à k. Cet espace est isomorphe à $\mathbb{R}^{(k+1)(k+2)}$. Pour $k = \infty, j^\infty V$ est un espace de dimension infinie appelé espace des *champs de vecteurs formels.* Pour tout k, on définit l'application

$$\Pi_k : V \mapsto j^kV,$$

qui associe à $X \in V$ son k-jet $j^k X(0)$, autrement dit son polynôme de Taylor d'ordre k fini et sa série de Taylor pour $k = \infty$.

Définition 6.5. Un ensemble algébrique Σ de V de codimension k, est un ensemble de la forme $\Sigma = \Pi_l^{-1}(\sigma)$ pour un l fini et σ un ensemble algébrique réel de l'espace euclidien $j^l V$ de codimension k (au sens usuel, c'est-à-dire défini par un nombre fini d'équations algébriques). De la même façon, on peut définir pour V les notions d'ensembles semi-algébriques, analytiques, sous-analytiques, etc.

Par abus de langage, si $\Sigma = \Pi_l^{-1}(\sigma)$ on dira simplement que Σ appartient à $j^l V$.

En se basant sur le théorème de Seidenberg 6.1, on peut construire une filtration (que nous appellerons filtration de Seidenberg) :

$$V \supset S_1 \supset \dots S_k \supset \dots$$

où les S_k sont des ensembles algébriques de codimension strictement croissante, tels que $X \in V \setminus S_1$ si et seulement si X est un germe hyperbolique et, plus généralement, $X \in S_k \setminus S_{k+1}$ si et seulement s'il peut se désingulariser au sens du théorème de Seidenberg par k éclatements successifs.

Le but ultime de la théorie des bifurcations locales des champs de vecteurs du plan serait de construire à partir de la filtration de Seidenberg une nouvelle filtration :

$$V \supset \Sigma_1 \supset \dots \Sigma_k \supset \dots \tag{6.15}$$

où chaque Σ_k serait un ensemble algébrique de codimension k, contenu dans $j^{n(k)}V$ pour un certain $n(k) \in \mathbb{N}$, telle que $\Sigma_1 = S_1$ et, plus généralement, $X \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ si et seulement si X était de codimension k (au sens défini dans la définition 5.4) et que, de plus, *un déploiement X_λ avec $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^k$ et $X_0 \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ serait un déploiement versel, si et seulement si l'application $(x, \lambda) \mapsto j^{n(k)} X_\lambda(x)$ était transverse à Σ_k.*

Pour pouvoir utiliser la théorie de la transversalité, il faudrait, de plus, que la filtration par les Σ_i vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney, déjà mentionnées au paragraphe 5.2.

Si une telle filtration existait, toute famille X_μ avec $\mu \in P \subset \mathbb{R}^p$ pourrait être approchée en classe $\mathcal{C}^\infty$ par une famille $\tilde{X}_\mu$, dont toutes les singularités seraient de codimension finie et inférieure à p (et, de plus, la famille $\tilde{X}_\mu$ serait induite localement au voisinage de chaque singularité d'un déploiement versel par une application surjective de rang maximum).

Ce programme n'a été que très partiellement réalisé. Nous allons passer en revue les résultats obtenus jusqu'à maintenant.

6.3.1. Singularités de codimension ≤ 2

Les résultats répertoriés dans les sections précédentes sur les bifurcations de type selle-nœud, de type Hopf-Takens pour les petites codimensions et sur la bifurcation de Bogdanov-Takens nous permettent de trouver toutes les singularités de codimension ≤ 2 et donc de construire le début de la filtration recherchée, c'est-à-dire la suite finie d'inclusions :

$$V \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3.$$

(1) $V \setminus \Sigma_1$ est par définition l'ensemble des germes hyperboliques ou, de façon équivalente, Σ_1 est l'ensemble algébrique des X dont le 1-jet a un spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ vérifiant $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ou bien que la partie réelle des λ_i soit nulle (conditions qui se traduisent par des équations algébriques sur les coefficients de la matrice représentative de $j^1X(0)$).

(2) $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$ est la réunion disjointe de deux parties semi-algébriques de codimension 1 :

1. L'ensemble des germes de type selle-nœud de codimension 1, qui sont les singularités de 2-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $\pm y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_1 x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ avec $\alpha_1 \neq 0$.
2. L'ensemble des germes de Hopf-Takens de codimension 1, qui sont les singularités de 3-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents en coordonnées polaires à $\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \pm\rho^3\frac{\partial}{\partial\rho}$.

(3) $\Sigma_2 \setminus \Sigma_3$ est la réunion disjointe de trois parties semi-algébriques de codimension 2 :

1. L'ensemble des germes de type selle-nœud de codimension 2, qui sont les singularités de 3-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $\pm y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_2 x^3 \frac{\partial}{\partial x}$ avec $\alpha_2 \neq 0$.
2. L'ensemble des germes de Hopf-Takens de codimension 2, qui sont les singularités de 5-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents en coordonnées polaires à $\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \alpha_2\rho^5\frac{\partial}{\partial\rho}$ avec $\alpha_2 \neq 0$.
3. L'ensemble des germes de Bogdanov-Takens de codimension 2 (les seuls définis jusqu'à maintenant), qui sont les singularités de 2-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy)\frac{\partial}{\partial y}$.

Nous avons donné dans les paragraphes précédents les déploiements versels de ces germes et on pourra vérifier que ces déploiements sont caractérisés par la propriété de transversalité évoquée ci-dessus.

6.3.2. Sous-filtrations particulières

Les résultats donnés dans le paragraphe 5.5 pour les singularités de type selle-nœud et dans le paragraphe 5.7 pour les singularités de type Hopf-Takens peuvent s'interpréter comme la construction de filtrations particulières qui sont des sous-filtrations de l'hypothétique filtration $\{\Sigma_k\}$, au sens où l'ensemble de codimension k de la sous-filtration est contenu, par définition, dans l'hypothétique Σ_k.

La filtration Selle-Nœud :

$$V \supset \Sigma_1^{SN} \supset \ldots \supset \Sigma_k^{SN} \supset \ldots$$

Par définition, $X \in \Sigma_k^{SN} \setminus \Sigma_{k+1}^{SN}$ si et seulement si $j^{k+1}X(0)$ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à $\pm y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha x^{k+1}\frac{\partial}{\partial x}$ avec $\alpha \neq 0$.

La filtration Hopf-Takens

$$V \supset \Sigma_1^{HT} \supset \ldots \supset \Sigma_k^{HT} \supset \ldots$$

Par définition, $X \in \Sigma_k^{HT} \setminus \Sigma_{k+1}^{HT}$ si et seulement si $j^{2k+1}X(0)$ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à $\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \alpha\rho^{2k+1}\frac{\partial}{\partial\rho}$ avec $\alpha \neq 0$. Les déploiements versels de ces différents germes de codimension finie sont donnés dans les paragraphes 5.5 et 5.7.

Plus récemment, une troisième sous-filtration a été obtenue. Nous appellerons cette filtration : *filtration de Bogdanov-Takens*, car elle débute par l'ensemble de codimension 2, formé par les germes de type Bogdanov-Takens décrits dans le paragraphe 6.2.

La filtration Bogdanov-Takens

$$V \supset \Sigma_2^{BT} \supset \ldots \supset \Sigma_k^{BT} \supset \ldots$$

Par définition, $X \in \Sigma_k^{BT} \setminus \Sigma_{k+1}^{BT}$ si et seulement si $j^{K+1}X(0)$ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à $y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + b_k x^K y)\frac{\partial}{\partial x}$ avec $b_k \neq 0$ et $K = K(k) = [\frac{3k}{2}]$. Les résultats pour cette filtration sont récapitulés dans [57] pour $k \leq 3$. Ils ont été généralisés dans [43] pour tout $k \geq 4$ aux $X \in \Sigma_k^{BT} \setminus \Sigma_{k+1}^{BT}$. Un germe dans $\Sigma_k^{BT} \setminus \Sigma_{k+1}^{BT}$ admet un déploiement versel X_λ à $k+1$ paramètres ($\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k+1}$). Le nombre des orbites périodiques apparaissant par bifurcations est borné par k. Pour certaines valeurs du paramètre λ, deux points singuliers bifurquent : une selle $s(\lambda)$ et un foyer $f(\lambda)$. Les orbites périodiques entourent le foyer et ont un diamètre qui tend vers zéro quand $\lambda \to 0$. Le diagramme de bifurcation est associé à la théorie des catastrophes, au sens où le diagramme de bifurcation des orbites périodiques est homéomorphe au *diagramme de bifurcation des racines du polynôme versel de degré* $k : X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i X^i$ *en restriction à n'importe quel intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *tel*

que $a < b$. Remarquez que ce polynôme contient le monôme X^{k-1} et n'est donc pas mis sous la forme réduite de la théorie des catastrophes. En effet $0 \in \mathbb{R}$ ne joue pas de rôle particulier, et le passage d'une racine par l'une des extrémités de l'intervalle doit être considéré comme une bifurcation : en fait, le passage par a va correspondre à une bifurcation de type Hopf-Takens au foyer $f(\lambda)$, et le passage par b va correspondre à une bifurcation de connection de selle en $s(\lambda)$ (voir la définition et des résultats sur les bifurcations d'une connection de selle dans le paragraphe 6.4).

6.3.3. Singularités de codimension ≤ 3

On peut aussi décrire l'ensemble $\Sigma_3 \setminus \Sigma_4$ des singularités de codimension 3. On retrouve évidemment parmi ces singularités de codimension 3, celles de type selle-nœud contenues dans $\Sigma_3^{SN} \setminus \Sigma_4^{SN}$, celles de type Hopf-Takens contenues dans $\Sigma_3^{HT} \setminus \Sigma_4^{HT}$ et celles de type Bogdanov-Takens contenues dans $\Sigma_3^{BT} \setminus \Sigma_4^{BT}$. Une quatrième et dernière partie de $\Sigma_3 \setminus \Sigma_4$ a été décrite et étudiée dans [25]. Elle est formée par les singularités nilpotentes de codimension trois. Leur ensemble est la réunion disjointe de trois parties semi-algébriques de codimension 3 :

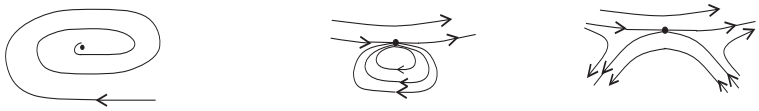
1. L'ensemble des germes de type nilpotent elliptique de codimension 3 de 3-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $y\frac{\partial}{\partial x} + \big(-x^3 + (bx \pm x^2)y\big)\frac{\partial}{\partial y}$ avec $0 < b < 2\sqrt{2}$.

2. L'ensemble des germes de type nilpotent parabolique de 3-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $y\frac{\partial}{\partial x} + \big(-x^3 + (bx \pm x^2)y\big)\frac{\partial}{\partial y}$ avec $b > 2\sqrt{2}$.

3. L'ensemble des germes de type nilpotent hyperbolique de 3-jets $\mathcal{C}^\infty$-équivalents à $y\frac{\partial}{\partial x} + \big(x^3 + (bx \pm x^2)y\big)\frac{\partial}{\partial y}$ avec $b > 0$.

On a représenté dans la figure 6.9 les portraits de phase de ces trois types de germes. La preuve qu'ils sont de codimension 3 et la description de leurs déploiements versels ont été faites dans [25], moyennant quelques conjectures sur des fonctions intégrales analytiques, conjectures qui n'ont pas encore été établies théoriquement (malgré des tentatives faites par H. Zolandek dans cette référence), mais qui ont pu être vérifiées numériquement. Les diagrammes des bifurcations versels sont relativement compliqués et peuvent être consultés dans [25].

Aucun germe de codimension ≥ 4 n'a pu être complètement étudié jusqu'à maintenant, hormis ceux associés à l'une des trois filtrations remarquables décrites ci-dessus. Les germes non contenus dans l'une de ces filtrations doivent avoir un 1-jet nul. Quelques candidats de 2-jets génériques ont été proposés et leurs bifurcations partiellement étudiées dans [35].



Elliptique Parabolique Hyperbolique

Figure 6.9

6.4. Déploiements d'orbites périodiques et de polycycles

Dans la section précédente, nous nous sommes limités aux études locales des déploiements de singularités, c'est-à-dire de germes de champs de vecteurs au voisinage d'un point singulier. Une idée générale pour étudier de tels déploiements est évidemment de faire une récurrence sur le nombre de paramètres.

Supposons que nous voulions étudier un déploiement X_λ d'un germe X_0 à l'origine, avec $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k+1}$. On choisit une sphère S centrée à l'origine de l'espace des paramètres et de rayon assez petit pour que cette sphère soit contenue dans un voisinage sur lequel X_λ soit défini. On espère que si le déploiement est assez générique (comme tout déploiement candidat à être déploiement versel), l'ensemble de bifurcation Σ soit transverse à S et que, de plus, Σ soit homéomorphe à un cône centré à l'origine de $\mathbb{R}^{k+1}$. Il est naturel d'espérer que cette propriété sera vérifiée car elle est vérifiée en chaque point d'un ensemble semi-algébrique réel quelconque. D'autre part, elle est vérifiée pour tous les diagrammes versels connus, mais aucun résultat général dans ce sens n'a pu être prouvé jusqu'à maintenant.

Cependant, si tel était le cas en toute généralité, on serait alors ramené à étudier la famille X_λ avec $\lambda \in S$, variété de dimension k. Supposons que l'on connaisse la filtration (6.15) jusqu'à l'ordre k. Alors, comme on l'a dit dans l'introduction du paragraphe 6.3, si le déploiement X_λ est assez générique, la famille $X_\lambda|_{\lambda\in S}$ n'aura pour $\lambda \in S$ que des singularités de codimension $\leq k$, qui seront déployées de façon verselle à induction près, par la famille $X_\lambda|_{\lambda\in S}$.

Mais l'on voit immédiatement qu'il est impossible de reconstituer le diagramme de bifurcation de $X_\lambda|_{\lambda\in S}$ seulement à partir des déploiements de ces points singuliers. Par exemple, dans les déploiements de type Hopf-Takens, on trouve des bifurcations d'orbites périodiques. Dans les déploiements de type Bogdanov-Takens, on trouve en outre des bifurcations de connections de selle. On doit donc mener de front une récurrence sur l'étude des bifurcations de points singuliers, avec celle d'objets plus étendus tels que les orbites périodiques et les connections de selles. Si l'on est dans $\mathbb{R}^2$ (ce que l'on peut toujours supposer pour l'étude des bifurcations localisées en un point singulier en dimension 2), le problème essentiel est la maîtrise des orbites périodiques et des ensembles d'où elles bifurquent. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 6.6. Soit X_λ une famille de champs de vecteurs sur une surface M^2 (c'est-à-dire sur une variété de dimension 2, par exemple $\mathbb{R}^2$), de paramètre $\lambda \in P$. Un *ensemble limite périodique* K de X_λ (pour la valeur λ_* du paramètre) est un compact de M^2, invariant par le flot de X_{λ_*}, tel qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans P convergeant vers λ_* et, pour chaque λ_n, une orbite périodique γ_n du champ de vecteurs X_{λ_n}, telle que la suite (γ_n) converge au sens de Hausdorff vers K.

Rappelons que, sur tout espace métrique (M, d), on définit une distance de Hausdorff d_H entre les parties compactes métriques non vides de M par :

$$d_H(A, B) = \mathrm{Sup}_{(x,y)\in A\times B}\{\mathrm{Inf}_{z\in B} d(x, z),\ \mathrm{Inf}_{z'\in A} d(z', y)\},$$

et qu'une propriété remarquable de cette distance d_H est que l'espace $\mathcal{C}(M)$ de toutes les parties compactes non vides de M est lui-même compact pour cette distance d_H, si M est compact.

Dans un programme d'étude des bifurcations des champs de vecteurs sur M^2, par récurrence sur le nombre de paramètres, on doit faire la récurrence sur tous les ensembles compacts candidats à être un ensemble limite périodique dans une famille de champ sur M^2.

Si M^2 est de genre 0, la théorie de Poincaré-Bendixson (adaptée aux familles) restreint le type topologique des ensembles limites périodiques. Si par exemple la famille est analytique, un ensemble limite périodique est soit un point singulier, soit une orbite périodique, soit un compact invariant appelé *graphique* (voir [57]). Un graphique peut contenir des points singuliers non isolés. Une telle situation apparaît dans les systèmes de relaxation qui sont équivalents à des *systèmes à perturbations singulières*. Nous ne parlerons pas de ce type de systèmes dégénérés dans cet ouvrage. Si par contre un graphique ne contient que des points singuliers isolés, il est un polycycle :

Définition 6.7. Un polycycle Γ d'un champ de vecteur X sur une surface M^2 est une courbe (avec éventuellement des points multiples) réunion d'un ensemble fini de points singuliers $\{p_1, \ldots, p_k\}$ et d'orbites régulières $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, telles que les ensembles limites de chacune de ces orbites γ_i sont contenus dans l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_k\}$. D'autre part, on doit pouvoir parcourir Γ dans le sens défini par X en parcourant une et une seule fois chaque orbite γ_i (mais en passant éventuellement plusieurs fois par certains points singuliers : Γ n'est pas nécessairement une courbe homéomorphe à un cercle).

Les points singuliers du polycycle sont appelés *sommets* de Γ. Les orbites régulières sont appelées *arêtes (ou connections)* de Γ.

On a représenté quelques polycycles dans la figure 6.10. On peut passer éventuellement plusieurs fois par certains points singuliers en parcourant un polycycle : un polycycle n'est pas nécessairement une courbe homéomorphe à un cercle ; par exemple, un des polycycles de la figure 6.10 a la forme d'un huit.

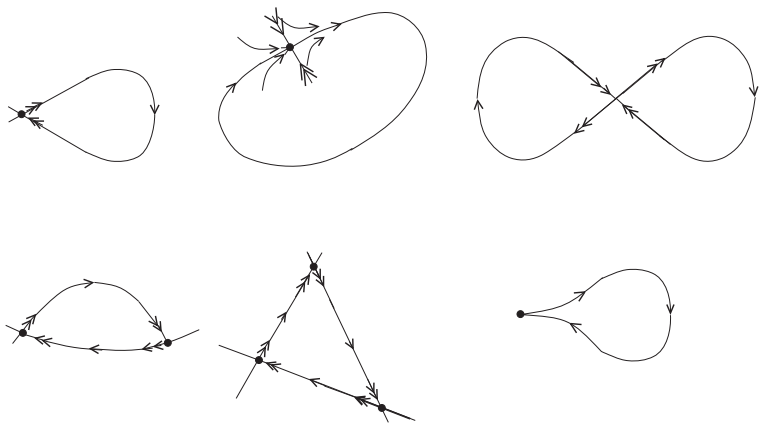


Figure 6.10. Polycycles.

Nous allons maintenant présenter quelques résultats concernant les orbites périodiques et les polycycles. Les plus simples des polycycles sont les *polycycles hyperboliques* dont tous les sommets sont des points de selles hyperboliques. Si le polycycle contient seulement des points hyperboliques ou bien semi-hyperboliques (cf. définition 6.4), il est dit *élémentaire*. Les polycycles *non élémentaires* sont donc ceux dont l'un des sommets n'est ni hyperbolique, ni semi-hyperbolique (un tel point n'est pas désingularisé au sens de Seidenberg).

6.4.1. Bifurcation des orbites périodiques

Soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une surface M^2 et γ une orbite périodique. On considère une section transverse Σ coupant γ en un point p intérieur à Σ. Dans le chapitre II-6, on a défini l'application de Poincaré de X relative à Σ comme un difféomorphisme P d'un voisinage U de p dans Σ à valeurs dans Σ. On choisit une paramétrisation de Σ par $x \in \mathbb{R}$, avec $U = \{-\varepsilon < x < \varepsilon\}$ et $p = \{x = 0\}$. On dit que γ est *hyperbolique* si $|P'(0)| \neq 1$ (cette notion est indépendante du choix de Σ et de sa paramétrisation). Si M^2 est orientable, on a

$P'(x) > 0$ pour tout x et la condition d'hyperbolicité se réduit à $P'(0) \neq 1$ (c'est-à-dire, 0 est un zéro simple de $P(x) - x$). On va supposer que M^2 est orientable. Une orbite hyperbolique est localement structurellement stable (voir chapitre 4).

On dit que l'orbite périodique est de codimension $k \geq 1$ si

$$P(x) = x + a_{k+1}x^{k+1} + o(|x|^{k+1}),$$

avec $a_{k+1} \neq 0$ (par extension on peut dire qu'une orbite hyperbolique est de codimension 0). Cette définition est indépendante du choix de Σ et de sa paramétrisation.

On considère maintenant un déploiement X_λ de X au voisinage de γ. On a $X_0 = X$ et la famille X_λ est définie pour $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^p$ et pour un certain $p \in \mathbb{N}$. On peut restreindre $\lambda \sim 0$ de façon que Σ soit encore une section transverse pour tout λ. L'application de Poincaré de X_λ relative à Σ est définie sur un voisinage U de $0 \in \Sigma$. On définit ainsi sur U et pour $\lambda \sim 0$, une famille $\mathcal{C}^\infty$ de difféomorphismes à paramètre, notée $P(x, \lambda)$, telle que $P(x, 0) = P(x)$.

Soit X et X' des champs de vecteurs définis au voisinage d'orbites périodiques γ et γ' respectivement, sur des variétés de même dimension. Soit P et P' des applications de Poincaré associées à X, γ et X', γ' respectivement. La version locale de la proposition 1.1 implique que si P et P' sont conjuguées alors le champ X au voisinage de γ est équivalent au champ X' au voisinage de γ'. Il en résulte que deux déploiements de champs au voisinage d'orbites périodiques sont $\mathcal{C}^\infty$-équivalents si les déploiements des applications de Poincaré correspondantes sont $\mathcal{C}^\infty$-conjuguées. En particulier, si P_λ est un déploiement versel de difféomorphisme en dimension un (au sens de la conjugaison topologique), X_λ est un déploiement versel (au sens de l'équivalence). Les orbites périodiques de X_λ (au voisinage de γ) vont correspondre aux points fixes de P_λ (au voisinage de 0). Le diagramme de bifurcation versel est, d'après (5.6), celui des zéros du polynôme $x^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^i$ (voir les exemples et figures dans le paragraphe 5.2). Une étude très comparable a été faite dans le paragraphe 5.7 pour réduire l'étude des déploiements de champs de type Hopf-Takens à celle des déploiements de leurs applications de Poincaré. On pourra trouver les détails de cette réduction dans ce paragraphe.

6.4.2. Connection de selle de codimension 1

Soit X_0 un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une surface M^2 supposée orientable, avec un point de selle s_0 de valeurs propres $-\lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. On suppose qu'il existe une orbite γ de X_0 telle que $s_0 = \alpha(\gamma) = \omega(\gamma)$. Autrement dit, si $\varphi(t, m)$ est le flot de X_0 et si $m \in \gamma$, on a $\varphi(t, m) \to s_0$ pour $t \to -\infty$ ou bien pour $t \to +\infty$. La courbe $\Gamma = \gamma \cup \{s_0\}$ est appelée *connection (homocline) de selle.*

Γ est une courbe simple dans M^2, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sauf en s_0. On a représenté dans la figure 6.11 des exemples de connections de selle dans $\mathbb{R}^2$. Les bifurcations des connections de selle de codimension 1 ont été initialement étudiées par Léontovitch (voir [57]). La figure 6.11 montrent deux connections de selle dans $\mathbb{R}^2$ qui sont non équivalentes par un difféomorphisme, même défini seulement localement.

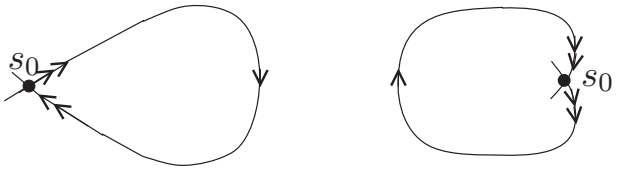


Figure 6.11. Connections de selle dans $\mathbb{R}^2$.

On a vu dans le chapitre 3 que le point de selle hyperbolique s_0 possédait une variété stable $W^s(s_0)$ et une variété instable $W^u(s_0)$ qui sont ici des courbes immergées dans M^2, chacune coupée *a priori* par s_0 en deux *séparatrices* du point de selle : $W^s(s_0)\setminus\{s_0\}$ est formé de deux séparatrices stables qui sont en fait deux trajectoires régulières ; on peut faire une remarque analogue pour $W^u(s_0)\setminus\{s_0\}$. On a $\Gamma \subset W^s(s_0)\cup W^u(s_0)$: en fait $\gamma = \Gamma\setminus\{s_0\}$ est une trajectoire qui est à la fois une séparatrice stable et une séparatrice instable.

Il est clair qu'une connection de selle peut *se casser* par une perturbation arbitrairement petite du champ, de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a vu dans le chapitre 4 que les champs de Morse-Smale de M^2, qui sont les champs structurellement stables, n'ont pas de telle connection de selle. Nous allons décrire ici les bifurcations de connection de selle les plus génériques : celles de codimension 1 qui ont des déploiements versels à 1 paramètre.

Le rapport $r = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est appelé *rapport d'hyperbolicité* du point de selle s_0. Si $T = \lambda_2 - \lambda_1$ est la trace, alors $T = \lambda_2(1-r)$. Ainsi $r \neq 1$ si et seulement si $T \neq 0$, et $(1-r)$ a le signe de T car, par hypothèse, $\lambda_2 > 0$.

Une *première condition générique* à imposer est la :

$$\text{Condition } \ G_1 : r \neq 1.$$

Considérons maintenant un déploiement quelconque X_μ de X_0, défini sur un voisinage de Γ, pour $\mu \sim 0 \in \mathbb{R}^p$. Pour $\mu \sim 0$, le champ X_μ a un seul point singulier $s_\mu \sim s_0$, qui est un point de selle hyperbolique avec des variétés invariantes $W^s(s_\mu), W^u(s_\mu)$ dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de μ. On peut supposer des coordonnées locales (x,y) choisies de façon $\mathcal{C}^\infty$ en fonction de (x,y,μ) telles que, pour tout μ, on ait $s_\mu = (0,0)$, et que Ox et Oy soient les variétés invariantes locales de X_μ en s_μ, respectivement stable et instable (on applique le théorème des fonctions

implicites, pour choisir l'origine des coordonnées telle que $s_\mu = (0,0)$, puis le théorème 3.3, en tenant compte de la dépendance $\mathcal{C}^\infty$ des variétés invariantes locales par rapport à μ).

Soit Σ la section transverse relative à X_0 comme définie au début du sous-paragraphe 6.4.1. Par le choix des coordonnées locales, il est clair que $\{x > 0\}$ correspond au côté de Γ pour lequel une application de retour P_0 de X_0 est définie sur Σ. Cette application se prolonge pour tout μ, et on a une application de Poincaré P_μ de X_μ sur Σ, définie pour $x \sim 0,\ x > 0$ et $\mu \sim 0$. Elle se prolonge continûment en $x = 0$ avec en particulier $P_0(0) = 0$.

Prenons également une section $\mathcal{T}$ passant par un point $(x_0, 0)$ avec $x_0 > 0$, transverse à la variété stable locale Ox. On paramètre Σ par $x \sim 0 \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{T}$ par $y \sim 0 \in \mathbb{R}$. Dans cette paramétrisation par y, on dénote par $a(\mu) \sim 0$ la première intersection de $W^s(s_\mu)$ avec la section $\mathcal{T}$. Cette fonction $a(\mu)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On l'appelle « paramètre de cassure » (de la connection).

Une *deuxième condition générique* que nous imposons est la

$$\text{Condition } G_2 : da(0) \neq 0.$$

Remarquez que l'on utilise la différentielle da de l'application $a(\mu)$ définie sur $\mathbb{R}^p$, car *a priori* on peut avoir $p \geq 2$; si $p = 1$, on peut évidemment utiliser la dérivée $\frac{da}{d\mu}$. Cette condition G_2 signifie que si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, alors $\frac{\partial a}{\partial \mu_i}(0) \neq 0$ pour un certain $i = 1, \ldots, p$. Les deux conditions génériques ne dépendent pas du choix des coordonnées locales et des sections Σ et $\mathcal{T}$.

Un champ de vecteurs en dimension deux, de classe $\mathcal{C}^\infty$, est toujours $\mathcal{C}^1$-linéarisable au voisinage d'un point de selle en dimension deux ([31]). En appliquant ce résultat, on obtient de nouvelles coordonnées locales (x, y) au voisinage de s_0, de classe $\mathcal{C}^1$, dans lesquelles on a encore

$$s_\mu = (0,0),\ W^s(s_\mu) = \{x = 0, \},\ W^u(s_\mu) = \{y = 0\},$$

et

$$X_\mu = -\lambda_1(\mu) y \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_2(\mu) x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ce résultat de $\mathcal{C}^1$-linéarisation n'est en réalité pas nécessaire, mais nous l'utilisons ici pour éviter des calculs trop laborieux.

On choisit $\Sigma = \{y = 1\}$ paramétrée par x. La transition D_μ le long du flot de X_μ (appelée *application de Dulac* du point de selle) entre Σ et $\mathcal{T} = \{x = 1\}$ paramétrée par y, est égale à $D_\mu(x) = x^{r(\mu)}$ où $r(\mu) = \frac{\lambda_1(\mu)}{\lambda_2(\mu)}$.

On a une transition le long du flot de $-X_\mu$ entre Σ et $\mathcal{T}$ au-dessus de γ. C'est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$:

$$R_\mu(x) = a(\mu) + b(\mu)x + o(x), \quad \text{avec } \ b(0) > 0, a(0) = 0.$$

Le coefficient constant de $R_\mu(x)$ est évidemment égal au paramètre de cassure $a(\mu)$. Cette fonction est juste de classe $\mathcal{C}^1$.

L'application de Poincaré de X_μ sur Σ est égale à $P_\mu = R_\mu^{-1} \circ D_\mu$. Les orbites périodiques de X_μ coupant Σ sont données par l'équation :

$$P_\mu(x) - x = 0.$$

On préfère considérer, de façon équivalente, l'équation $R_\mu(x) - D_\mu(x) = 0$, qui s'écrit :

$$a(\mu) + b(\mu)x + \varphi(x,\mu) - x^{r(\mu)} = 0, \quad \text{pour} \quad x > 0, \tag{6.16}$$

où $\varphi(x,\mu)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en $o(x)$. Remarquez de plus que $b(\mu) = \frac{dR_\mu}{dx}(0)$ est continue.

Supposons maintenant, pour simplifier la discussion, que $\mu \in \mathbb{R}$ (déploiement à 1 paramètre). Nous allons considérer le cas où $r(0) = r > 1$ et $\frac{d}{d\mu}a(0) > 0$. Les autres cas se ramènent à ce cas en changeant X_μ par $-X_\mu$ et/ou μ par $-\mu$.

On s'intéresse aux racines de l'équation (6.16) dans un intervalle $[0, x_0]$ et pour $|\mu| \geq \mu_0$, où $x_0 > 0$ et μ_0 sont choisis suffisamment petits (la transition de Dulac $D_\mu : x \longmapsto x^{r(\mu)} + o(x)$ n'est définie que pour $x \geq 0$ et petit).

Comme $b(\mu), r(\mu)$ sont continues, que $b(0) > 0$ et que $r(0) > 1$, on peut choisir un δ tel que $0 < \delta < 1$ et un $\mu_0 > 0$ de façon que $b(\mu) > \delta$ et $r(\mu) - 1 > \delta$ pour $|\mu| \leq \mu_0$. On pourra aussi supposer que $a(\mu) < 0$ pour $\mu \in [-\mu_0, 0[$ et $a(\mu) > 0$ pour $\mu \in]0, \mu_0]$.

Désignons par $\psi(x,\mu)$ la fonction du membre de gauche de (6.16). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Sa dérivée en x est égale à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\mu) = b(\mu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\mu) - r(\mu)x^{r(\mu)-1}.$$

La fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\mu)$ est continue en (x,μ) et de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,\mu) \equiv 0$ (comme conséquence de $\varphi(x,\mu) = o(x)$). Pour tout $x_0 > 0$, la fonction $x^{r(\mu)-1}$ est continue pour $(x,\mu) \in [0, x_0] \times [-\mu_0, \mu_0]$, car $r(\mu) - 1 > \delta$ et vaut 0 pour $x = 0$. On peut donc choisir $x_0 > 0$ de façon que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\mu) > 0 \tag{6.17}$$

pour tout $(x,\mu) \in [0, x_0] \times [-\mu_0, \mu_0]$. La fonction $x \mapsto \psi(x,\mu)$ est donc strictement croissante sur $[0, x_0]$ et a donc au plus une racine sur cet intervalle.

Comme $\psi(0,\mu) = a(\mu)$ est strictement positif si $\mu \in]0, \mu_0]$, l'équation (6.16) n'a pas de racine sur $[0, x_0]$ pour $\mu \in]0, \mu_0]$.

Considérons maintenant $\mu \in [-\mu_0, 0]$. Comme $\varphi(x,\mu) = o(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut choisir x_0 et μ_0 assez petits pour que $|\varphi(x,\mu)| \leq \frac{\delta}{2}x_0$. On a alors, pour tout $x \in [0, x_0]$, l'estimation suivante :

$$\psi(x_0,\mu) \geq -|a(\mu)| + \delta x_0 - \frac{\delta}{2}x_0 - x_0^{1+\delta} \geq x_0\left(\frac{\delta}{2} - x_0^{\delta}\right) - |a(\mu)|.$$

On choisit maintenant x_0 tel que $x_0^{\delta} < \frac{\delta}{2}$, puis μ_0 tel que $|\mu| \leq \mu_0$ implique que $|a(\mu)| < x_0(\frac{\delta}{2} - x_0^{\delta})$, ce qui est possible car $a(\mu) \sim 0$ pour $\mu \sim 0$ et $a(\mu) \in C^{\infty}$.

Pour ces choix de x_0 et μ_0, on a $\psi(x_0,\mu) > 0$, pour tout $|\mu| \leq \mu_0$. Considérons maintenant $\mu < 0$. On a $\psi(0,\mu) = a(\mu) < 0$ car $a(0) = 0$ et que l'on a supposé $\frac{d}{d\mu}a(0) > 0$, et $\psi(x_0,\mu) > 0$. Il existe donc une solution de (6.16) sur $]0, x_0[$ et l'on sait que cette solution est unique. Désignons-la par $x(\mu)$. Comme $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\mu) > 0$ pour tout $(x,\mu) \in [0,x_0] \times [-\mu_0,\mu_0]$ et que $\psi(x,\mu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour montrer que la fonction $x(\mu)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. On sait d'autre part que $x(0) = 0$ et que $x(\mu) > 0$ si $\mu < 0$.

Pour $\mu = 0$ on a évidemment la connection de selle. La connection de selle bifurque donc en une orbite périodique hyperbolique attractante pour $\mu < 0$. Les portraits de phase du déploiement sont représentés dans la figure 6.12.

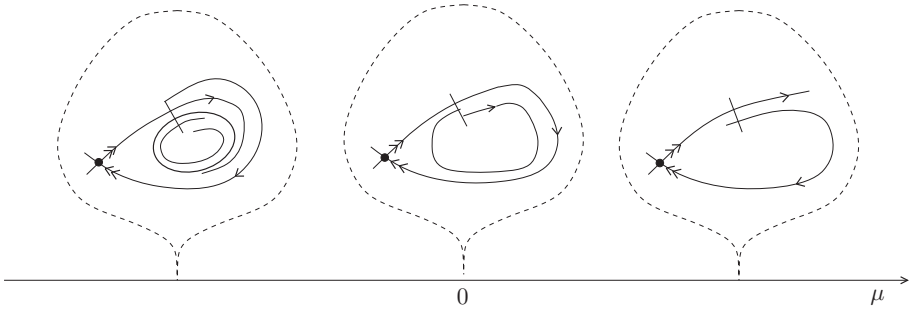


Figure 6.12. Bifurcation de la connexion de selle ; cas $r(0) > 1$, $\frac{da}{d\mu}(0) > 0$.

Si maintenant X_μ est un déploiement à un nombre quelconque de paramètres déployant X_0, les orbites périodiques coupant Σ seront également données par l'équation (6.16).

Il en résulte que tout déploiement à 1 paramètre X_μ, vérifiant les conditions G_1 et G_2, est déploiement versel de X_0.

Remarquez qu'un tel déploiement est structurellement stable, au sens que tout déploiement $\mathcal{C}^1$-proche lui est $\mathcal{C}^{\infty}$-équivalent.

6.4.3. Déploiements génériques de polycycles hyperboliques

L'étude précédente des déploiements génériques de la connection de selle a été généralisée partiellement aux polycycles hyperboliques avec un nombre de sommets $k \geq 2$, dit k-cycles hyperboliques. Cherkas a étudié le cas des 2-cycles hyperboliques. Soit Γ un tel 2-cycle d'un champ X_0 et soit r_1, r_2 les rapports d'hyperbolicité de X_0 aux deux sommets. On considère un déploiement X_β avec $\beta = (\beta_1, \beta_2) \sim 0 \in \mathbb{R}^2$ tels que β_1 et β_2 soient précisément les paramètres de cassure des deux connections de selle : β_1 par exemple est la distance entre les points d'arrivée de deux variétés invariantes des deux points de selle de X_β, variétés proches de la connection supérieure de X_0, sur une section à cette connection (figure 6.13). Alors Cherkas a montré que ce déploiement est un déploiement versel du germe de X_0 le long de Γ. Il y a 2 cas possibles au changement de X en $-X$ et à la permutation des deux sommets près. Si $r_1 > 1, r_2 > 1$, une seule orbite périodique bifurque dans X_β. Si $r_1 > 1, r_2 < 1$ et $r_1 r_2 > 1$ deux orbites périodiques bifurquent.

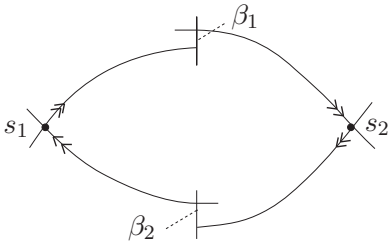


Figure 6.13. Bifurcation 2-cycle.

Les déploiements génériques de k-cycles hyperboliques Γ, avec $k \geq 3$, ont été définis et étudiés par A. Mourtada (voir [57]). Ces déploiements génériques X_β sont des déploiements dont les k paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sont tout simplement les cassures des k connections (figure 6.14). Sous des conditions génériques pour les k rapports d'hyperbolicité des sommets, Mourtada montre l'existence d'une borne M_k pour le nombre des orbites périodiques qui bifurquent dans X_β. Il montre que les déploiements sont versels pour $k = 3, 4$. Trois orbites périodiques au plus bifurquent si $k = 3$, mais il existe des déploiements versels pour lesquels cinq orbites périodiques bifurquent pour $k = 4$. Pour $k \geq 5$, on ne sait pas si les déploiements génériques définis par Mourtada sont des déploiements versels.

6.4.4. Connection de selle de codimension quelconque

Soit à nouveau un champ X_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ défini au voisinage d'une connection de selle Γ. Soit s le point de selle et r son rapport d'hyperbolicité. Nous avons vu

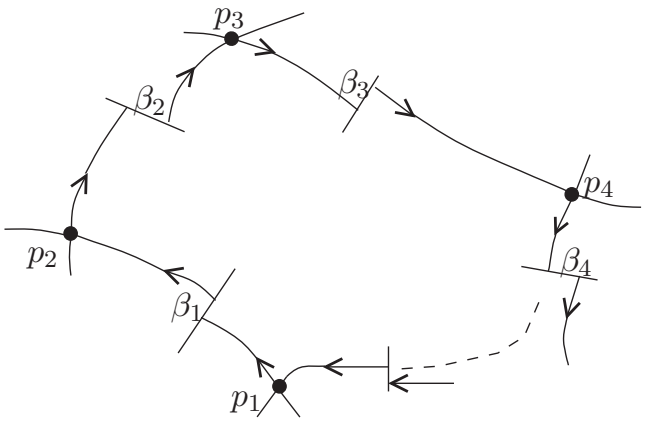


Figure 6.14. Bifurcation d'un k-cycle.

dans le sous-paragraphe précédent que si le germe (X_0, Γ) vérifie que $r \neq 1$, alors ce germe est de codimension 1 (par abus de language, on dit que la connection de selle est de codimension 1). Nous allons donc supposer maintenant que $r = 1$ (on dit que le point de selle est fortement résonant). Soit Σ une section transverve en un point régulier de la connection, paramétrée par $x \sim 0 \in \mathbb{R}$. Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose que $x > 0$ correspond au côté sur lequel l'application de Poincaré $P(x)$ de Γ est définie. L'application P n'est pas différentiable en $x = 0$, mais Dulac a montré que cette fonction admettait un développement formel sur une échelle de puissance-logarithme (développement appelé maintenant *développement de Dulac* de P), de type suivant (voir [57]) :

$$\hat{P}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i x^i + b_i x^{i+1} \ln x), \text{ avec } a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ et } a_1 > 0.$$

Dire que la série formelle $\hat{P}$ est le développement de Dulac de P signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(x) - \sum_{i=1}^{n} (a_i x^i + b_i x^{i+1} \ln x) = o(x^n).$$

On pose la définition suivante, justifiée par un résultat qui sera énoncé ensuite :

Définition 6.8. Soit un entier $k \geq 1$. On dit que le germe (X_0, Γ) est de codimension $2k$ si $a_k \neq 0, a_i = 0$ et $b_i = 0$ pour $i \leq k-1$. On dit que (X_0, Γ) est de codimension $2k+1$ si $b_k \neq 0, a_i = 0$ pour $i \leq k$ et $b_i = 0$ pour $i \leq k-1$.

On a alors le résultat suivant [57] (la précision sur le type topologique du diagramme est établie dans [43]) :

Théorème 6.3. *Un germe est de codimension $q \geq 2$, au sens de la définition 6.8, si et seulement s'il admet un déploiement versel à q paramètres (ce qui justifie la définition précédente de la codimension !). Un tel déploiement versel produit q orbites périodiques. Son ensemble de bifurcation est homéomorphe à celui des racines du polynôme $X^q + \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i X^i$ sur $\{X \geq 0\}$, où l'on considère comme bifurcation le passage d'une racine par $0 \in \mathbb{R}$.*

Remarque 6.4. La preuve du résultat sur les singularités de type Bogdanov-Takens évoqué dans le paragraphe 6.3.2 et établi dans *[43]*, s'appuie sur le théorème 6.3.

Nous allons seulement donner l'indication suivante sur la preuve. Si X_λ est un déploiement, on peut supposer que le champ X_λ a un point de selle $s(\lambda)$ proche de $s(0) = s$. On peut alors changer la famille par conjugaison $\mathcal{C}^\infty$ de façon que $s(\lambda) \equiv s$. Une difficulté majeure est que le rapport d'hyperbolicité $r(\lambda)$ au point de selle dépend de λ, et que l'application de retour P_λ n'aura plus de développement formel de type Dulac en puissance-logarithme dès que $r(\lambda) \neq 1$. L'idée est de remplacer le logarithme par la fonction $\omega(x, \lambda) = \frac{x^{r(\lambda)-1}-1}{r(\lambda)-1}$ qui tend vers $\ln x$ lorsque $r(\lambda) \to 1$. On peut alors écrire un développement d'ordre fini de P_λ dont la partie principale est de type « puissance-ω », avec des coefficients analytiques par rapport à λ (voir plus d'informations dans [57]).

6.4.5. Autres résultats sur les bifurcations de polycycles

On ne connaît pas quels sont tous les déploiements versels de polycycles, même des seuls polycycles hyperboliques. Le seul résultat général concernant les polycycles élémentaires, dans la perspective d'obtenir des déploiements versels, a été obtenu par V. Kaloshin (voir [57]) :

Théorème 6.4. *Soit un entier $k \geq 1$ quelconque. Alors il existe une borne $E(k)$ (ne dépendant que de k) telle que tout déploiement* générique *à un nombre quelconque de paramètres, au voisinage d'un polycycle élémentaire quelconque à k sommets, produit moins de $E(k)$ orbites périodiques.*

On peut espérer que les déploiements génériques de l'énoncé du théorème 6.4 seront des déploiements versels. Mais même ainsi, ces déploiements ne seraient pas tous les déploiements versels possibles. En fait, dans le cas d'un k-cycle hyperbolique, la condition de généricité de Kaloshin coïncide avec celle de Mourtada. Les déploiements génériques avec $l \geq k$ paramètres, considérés par Kaloshin, sont donc

ceux induits à partir des déploiements de Mourtada. En conséquence, $E(1) = 1$, car les conditions génériques pour $k = 1$ sont celles définissant la codimension 1 ci-dessus. Mais on a vu, dans le sous-paragraphe précédent, que pour $k = 1$, il existait des déploiements versels en toute codimension, produisant un nombre d'orbites périodiques égal à la codimension.

L'étude des déploiements de polycycles non élémentaires est évidemment encore moins développée que celle des polycycles élémentaires. Le polycycle non élémentaire le plus simple est le *lacet cuspidal*, formé d'une connection en une singularité de Bogdanov-Takens de codimension 2 (aussi appelé point cuspidal). Soit X_0 le germe d'un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage d'un lacet cuspidal Γ. Il est facile de montrer que l'application de Poincaré de X_0 le long de Γ (et en un point régulier) est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est alors naturel de dire que le germe (X_0, Γ) est générique si l'application de Poincaré est hyperbolique (de dérivée différente de un le long du lacet). On considère alors un déploiement d'un tel germe (X_0, Γ) à trois paramètres (μ, ν, η), les paramètres (μ, ν) étant les deux paramètres du déploiement versel au voisinage du point cuspidal (voir paragraphe 6.2), et le paramètre η étant le paramètre de cassure de la connection (figure 6.15). Un tel déploiement est versel, et donc le germe générique (X_0, Γ) est de codimension 3 (voir [57]).

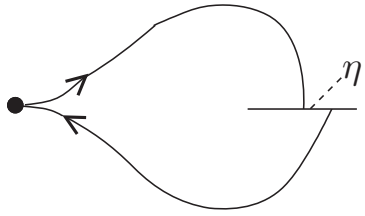


Figure 6.15. Paramètre de cassure du lacet cuspidal.

En changeant le champ X en $-X$, on peut toujours supposer que le lacet cuspidal Γ est attractant. Il y a alors deux cas possibles en fonction du signe $\pm$ dans le champ de Bogdanov-Takens $y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy)\frac{\partial}{\partial y}$. On pourra consulter les diagrammes de bifurcation dans [57]. Ce résultat de versalité a été prouvé moyennant une conjecture sur certaines fonctions intégrales analytiques. Cette conjecture n'a été que numériquement vérifiée jusqu'à maintenant.

Des déploiements de polycycles passant par une singularité de codimension 3 de type nilpotent ont aussi été étudiés par Rousseau et Zhou (voir le chapitre écrit par Rousseau dans [59] pour des énoncés de résultats et des réfèrences), en particulier pour les polycycles existant dans la famille des champs quadratiques du plan.

6.5. Bifurcations globales sur la sphère

Nous allons nous limiter aux champs de vecteurs sur le plan et sur la sphère S^2. En effet, c'est seulement sur les surfaces de genre 0, sur lesquelles on peut utiliser la théorie de Poincaré-Bendixson, que la dynamique des champs de vecteurs est relativement triviale. Cette circonstance permet d'y développer, jusqu'à un certain point, la théorie des bifurcations des champs de vecteurs à plusieurs paramètres. D'autre part, il est plus facile de traiter des champs sur S^2, plutôt que des champs sur $\mathbb{R}^2$, en raison de la compacité de la sphère. À ce propos, une remarque importante est que tout champ polynomial X de $\mathbb{R}^2$ s'étend naturellement, à équivalence analytique près, en un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur le disque de Poincaré (dont le bord est le *cercle à l'infini*), puis sur son double qui est la sphère S^2 (voir [24] par exemple) ; le champ $\tilde{X}$ est tangent au bord du disque de Poincaré, ce qui permet de le prolonger sur la sphère, en mettant le même champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur la seconde copie du disque de Poincaré (voir aussi les commentaires précédant la définition II-4.13). Si X_λ est une famille analytique, cette opération d'extension construit une famille analytique sur la sphère. On peut ainsi remplacer la famille des champs de vecteurs polynomiaux de degré moins que n, par une famille analytique équivalente sur la sphère. *Pour simplifier, on va donc supposer dans la suite que la famille (de champs) considérée est définie sur la sphère* S^2.

Nous allons passer en revue quelques questions importantes, en relation avec l'étude des familles de champs de vecteurs sur la sphère.

6.5.1. Le problème de la cyclicité finie

Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, un point capital pour l'étude des bifurcations en dimension 2 est le contrôle des orbites périodiques. On a vu dans le paragraphe 6.4 que les orbites périodiques bifurquent des ensembles limites périodiques de la famille. On s'intéresse principalement aux orbites périodiques isolées, aussi appelées *cycles limites*. Si Γ est un ensemble limite périodique, la première question que l'on se pose à propos des bifurcations de cycles limites de Γ, est de savoir si la borne supérieure, pour le nombre de tels cycles limites bifurquant de Γ, est finie (et de savoir aussi si l'on peut calculer cette borne !). Ce nombre ne dépend évidemment que du germe de la famille au voisinage de Γ, c'est-à-dire du déploiement défini par X_λ au voisinage de Γ, déploiement que l'on note (X_λ, Γ). On appelle cette borne supérieure *cyclicité du déploiement* (X_λ, Γ) et on la note par $\mathrm{Cycl}(X_\lambda, \Gamma)$ (voir dans [57] une définition précise). Une question générale au sujet de la cyclicité est la conjecture suivante :

Conjecture de cyclicité finie. *Tout déploiement analytique* (X_λ, Γ), *au voisinage d'un ensemble limite périodique sur* S^2 *a une cyclicité finie.*

Cette conjecture, qui a été vérifiée dans certains cas particuliers, reste ouverte en toute généralité.

***Remarque* 6.5.** Dans le cas d'une singularité de codimension finie, la cyclicité pour tout déploiement de classe $\mathcal{C}^\infty$ est bornée par un nombre fini indépendant du déploiement. Évidemment, pour une singularié arbitraire, on s'attend à ce que la cyclicité dépende du déploiement, et que l'on puisse avoir des déploiements avec des cyclicités arbitrairement grandes selon le déploiement considéré (pour avoir un exemple facile, on peut considérer les déploiements polynomiaux du champ linéaire de rotation $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ et utiliser le début du paragraphe 5.7). La conjecture demande seulement que cette cyclicité soit finie pour tout déploiement analytique.

Le résultat de cyclicité finie le plus important concerne le cas des familles analytiques à 0 paramètre de S^2, c'est-à-dire à la donnée d'un unique champ analytique X de S^2. Dans ce cas, un ensemble compact invariant K de X a une cyclicité finie, si et seulement s'il est isolé de l'ensemble des cycles limites de X, ou bien, ce qui revient au même, s'il n'y a pas accumulation de cycles limites sur K. Le résultat probablement le plus profond, démontré pour les champs de vecteurs analytiques sur la sphère, est dû à Écalle [26] et Ilyashenko [33], qui ont montré (indépendamment) le résultat suivant :

***Théorème* 6.5.** *Soit* X *un champ analytique sur une surface quelconque* M^2 *(éventuellement non compacte) et* Γ *un polycycle élémentaire de* X *(voir la définition 6.7; rappelons qu'un polycycle élémentaire est un polycycle dont tous les sommets sont hyperboliques ou bien semi-hyperboliques). Alors il n'y a pas d'accumulation de cycles limites de* X *sur* Γ.

Dans un article célèbre de 1923, Dulac a posé le problème suivant dont il a donné une preuve qui s'est révélée plus tard incomplète :

Problème de Dulac. *Montrer que tout champ polynomial de* $\mathbb{R}^2$ *n'a qu'un nombre fini de cycles limites.*

Ce problème est une version sans paramètre du seizième problème de Hilbert que nous allons présenter ci-après. Il en est, en quelque sorte, un préalable évident. Comme tout champ polynomial de $\mathbb{R}^2$ s'étend en un champ analytique sur S^2, le problème de Dulac peut être vu comme un cas particulier du problème suivant :

Problème de Dulac généralisé. *Montrer que tout champ analytique de* S^2 *n'a qu'un nombre fini de cycles limites.*

Le théorème 6.5 a pour corollaire facile une réponse positive aux deux problèmes, comme l'ont aussi montré Écalle et Ilyashenko :

Corollaire 6.1. *Tout champ analytique sur S^2 n'a qu'un nombre fini de cycles limites.*

Démonstration. Soit X un champ analytique sur S^2 (non identiquement nul !). Un tel champ peut avoir un ensemble $Z(X)$ de points singuliers non isolés sur S^2. Cet ensemble $Z(X)$ est un sous-ensemble analytique de S^2, de codimension au moins 1. Ceci implique que l'on peut trouver un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de S^2, avec un champ Y_i et une fonction f_i sur chaque U_i tels que $X = f_i Y_i$ sur U_i, et tels que $Z(X) \cap U_i = \{f_i = 0\}$. On raffine le recouvrement de façon que X n'ait pas de zéros non isolés sur les intersections $U_i \cap U_j$ avec $i \neq j$. La collection des $\{Y_i\}$ ne se recolle pas en général en un champ de vecteurs unique, mais définit plutôt un feuilletage orienté *avec points singuliers isolés* (pour chaque paire (i, j) avec $i \neq j$ il existe sur $U_i \cap U_j$ une fonction analytique g_{ij} sans zéros telles que $Y_i = g_{ij} Y_j$ sur $U_i \cap U_j$).

Comme de tels feuilletages ont exactement les mêmes propriétés dynamiques que les champs de vecteurs, on va supposer, pour simplifier, que l'on a un champ unique Y (c'est le cas si par exemple X est obtenu à partir d'un champ polynomial de $\mathbb{R}^2$). Par construction, *le champ Y n'a que des points singuliers isolés.* De plus, comme Y est colinéaire à X en dehors de $Z(X)$, tous les cycles limites de X sont aussi des cycles limites de Y. Il suffit donc de démontrer le résultat pour Y, champ analytique à points singuliers isolés.

Supposons que Y ait une infinité de cycles limites. On utilisant la compacité de l'espace $\mathcal{C}(S^2)$ des parties compactes non vides de S^2 (au sens de la topologie de Hausdorff), on peut trouver un ensemble limite périodique Γ de Y et une suite (γ_n) de cycles limites s'accumulant sur Γ. D'après la théorie de Poincaré-Bendixson, on sait que Γ est, soit une orbite périodique, soit un zéro, soit un polycycle de Y. Examinons les différents cas :

(1) Γ *ne peut pas être une orbite périodique.* En effet, l'application de Poincaré P de cette orbite périodique aurait une accumulation de points fixes. Comme Y est un champ analytique, P est aussi analytique et ne peut avoir une accumulation de points fixes que si elle est égale à l'application identique, ce qui serait en contradiction avec le fait que les γ_n sont des orbites périodiques isolées.

(2) *Supposons que* Γ *soit un zéro* $\{p\}$ *de* Y. Comme p est algébriquement isolé, on peut lui appliquer le théorème 6.1 de désingularisation de Seidenberg. En restreignant Y à un voisinage V de p, analytiquement difféomorphe au

disque, la succession d'éclatements du théorème fournit une surface ouverte $\widetilde{V}$ dans laquelle est plongé le lieu critique E de l'éclatement. Le champ Y se relève en un champ $\widetilde{Y}$ sur $\widetilde{V}$ et E est un polycycle élémentaire de ce champ. La suite (γ_n) (restreinte à V) se relève en une suite $(\tilde{\gamma}_n)$ qui s'accumule sur E, ce qui est impossible en vertu du théorème 6.5.

(3) *Supposons maintenant que* Γ *soit un polycycle.* Tous les sommets de ce polycycle sont algébriquement isolés. On peut appliquer le théorème de Seidenberg à chacun d'eux. Soit $\{p_1, \ldots, p_l\}$ l'ensemble des sommets. Pour $i = 1, \ldots, l$, on définit, comme au point (2), une surface $\widetilde{V}_i$ au-dessus d'un voisinage V_i de chaque point p_i, dans lequel le point p_i est remplacé par un arc E_i ne contenant que des points singuliers élémentaires. Par un recollement analytique (que nous ne détaillerons pas), on construit à partir de ces données locales, une surface $\widetilde{V}$, une application analytique Π de cette surface sur un voisinage V de Γ, un champ analytique $\widetilde{Y}$ sur $\widetilde{V}$ avec un polycyle élémentaire $\widetilde{\Gamma}$ qui se projette sur Γ. La suite (γ_n) restreinte à V se relève en une suite $\tilde{\gamma}_n$ de cycles limites, suite qui s'accumule sur le polycycle élémentaire $\tilde{\Gamma}$, ce qui contredit le théorème 6.5. ■

Un champ analytique X sur S^2, ou bien un champ polynomial sur $\mathbb{R}^2$, n'a donc qu'un nombre fini de cycles limites. Nous désignerons ce nombre par $D(X)$ (nombre que l'on peut appeler *nombre de Dulac* du champ X).

Pour les familles de champs sur S^2, la conjecture de cyclicité finie a la conséquence suivante (voir [57], proposition 1 du chapitre 2, p. 30) :

Proposition 6.1. *Supposons que la conjecture de cyclicité finie soit vraie. Alors, si* $\mathcal{X} = (X_\lambda)$ *est une famille analytique de champ de vecteurs sur* S^2, *avec un espace de paramètre* compact P, *la borne supérieure* $H(\mathcal{X}) = \mathrm{Sup}\{D(X_\lambda) \mid \lambda \in P\}$ *serait finie. Autrement dit, il existe* $M < +\infty$ *tel que pour tout* $\lambda \in P$, *le champ* X_λ *a moins de* M *cycles limites.*

Rappelons le fameux :

Seizième problème de Hilbert. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Alors le nombre des cycles limites de chaque champ* X *polynomial sur* $\mathbb{R}^2$ *de degré moins que* n *est borné par une borne finie ne dépendant que du degré* n *(et non du choix de* X*).*

Un cas particulier de la proposition 6.1 donnerait une réponse positive au seizième problème de Hilbert sous la forme suivante :

Corollaire 6.2. *Supposons que la conjecture de cyclicité finie soit vraie. Soit* $\mathcal{P}_n$ *l'espace des champs polynomiaux de* $\mathbb{R}^2$ *de degré moins que* n. *Alors on a* $H(n) = \mathrm{Sup}\{D(X) \mid X \in \mathcal{P}_n\} < +\infty$. *(La borne* $H(n)$ *est dite* nombre de Hilbert *pour le degré* n*.) Autrement dit, il existerait* $M < +\infty$ *tel que tout champ de vecteurs polynomial sur* $\mathbb{R}^2$, *de degré moins que* n, *aurait moins de* M *cycles limites.*

Preuve du corollaire 6.2. Un champ polynomial de $\mathbb{R}^2$, de degré moins que n, a une équation différentielle qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = & A(x,y) = \sum_{l+p=0}^{n} a_{lp} x^l y^p \\ \dot{y} = & B(x,y) = \sum_{l'+p'=0}^{n} b_{l'p'} x^{l'} y^{p'} \end{cases}, \tag{6.18}$$

avec $(a_{lp}, b_{l'p'}) \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$.

On peut écrire cette équation comme équation différentielle réelle dans la variable complexe $z = x + iy$:

$$\dot{z} = \sum_{l+p=0}^{n} c_{lp} z^l \bar{z}^p, \tag{6.19}$$

avec $(c_{lp}) \in \mathbb{C}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \approx \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$. On passe des coefficients $(a_{ij}, b_{i'j'})$ aux coefficients (c_{lp}) par un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire réel que nous n'écrirons pas, car dorénavant nous considérons l'équation différentielle sous la forme (6.19), dépendant du paramètre $\lambda = (c_{lp})_{0 \leq l+p \leq n}$.

On peut restreindre λ à la sphère $S^{(n+1)(n+2)-1}$, en excluant le champ identiquement nul (le champ nul n'a pas de cycle limite et, pour tout $\lambda \neq 0$, le champ X_λ est équivalent au champ $X_{\bar{\lambda}}$ avec $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{||\lambda||}$). *On a ainsi une famille polynomiale X_λ avec un espace de paramètre compact.* Comme il a été dit plus haut, on peut étendre chaque champ polynomial X_λ en un champ analytique $\widetilde{X}_\lambda$ sur S^2 dépendant analytiquement de λ (la famille de champs de vecteurs $\widetilde{X}_\lambda$ est donc analytique sur la sphère). Le cercle à l'infini, qui est un grand cercle sur S^2, est un ensemble invariant de $\widetilde{X}_\lambda$ qui admet donc un nombre de cycles limites borné par $D(X_\lambda)+1$. Tout champ de vecteur polynomial aura ainsi un nombre de cycles limites borné par celui d'un champ $\widetilde{X}_\lambda$ d'une famille analytique de champs de vecteurs sur S^2, à espace de paramètre compact, et on peut appliquer la proposition 6.1. ■

Remarque 6.6. La proposition 6.1 ne donne aucun moyen de calculer la borne $H(\mathcal{X})$, et donc la réponse apportée par le corollaire 6.2 serait *purement existentielle.* Or il semble assez clair que Hilbert s'attendait à un résultat explicite...

Il est trivial que $H(1) = 0$. Rappelons que le problème de Hilbert n'a été résolu pour aucun $n \geq 2$, même sous la forme faible du corollaire 6.2. On sait seulement que $H(2) \geq 4$, et plus généralement qu'il existe un polynôme quadratique explicite $P_2(n)$ tel que $H(n) \geq \ln n P_2(n)$.

Dans une famille analytique de paramètre $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^k$, k quelconque, *les déploiements des orbites périodiques, ainsi que ceux des singularités elliptiques*

(germes en un point singulier p de 1-jet égal à un champ de rotation), ont une cyclicité finie. Nous avons déjà démontré ce résultat dans le cas des foyers elliptiques de codimension finie dans le paragraphe 5.7 et, dans le cas des orbites périodiques de codimension finie, dans le paragraphe 6.4 (dans ce paragraphe on a réduit des orbites périodiques à celles des points fixes de difféomorphismes de dimension 1). Pour démontrer ce résultat dans le cas général, il suffit de remarquer que l'application de Poincaré locale est une famille analytique $P(x,\lambda)$ définie pour $x \sim 0 \in \mathbb{R}^2, \lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^k$. On peut démontrer la finitude par une preuve élémentaire en utilisant la division de $P(x,\lambda) - x$ dans l'*idéal de Bautin* (voir [57] pour une définition de cet idéal et une preuve élémentaire). On peut aussi invoquer un théorème de Gabrielov sur les projections propres d'ensembles analytiques. Dans ces deux cas, on se ramène à des considérations de géomètrie analytique. Il n'en sera pas de même en général pour les déploiements au voisinage d'ensembles limites périodiques plus compliqués. Le seul résultat établi jusqu'à présent est le suivant (voir [57]) :

Théorème 6.6. *Tout déploiement analytique au voisinage d'une connection de selle ou bien au voisinage d'un point cuspidal est de cyclicité finie. Un point cuspidal est une singularité en* $0 \in \mathbb{R}^2$ *dont le 2-jet est équivalent à* $y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \alpha xy)\frac{\partial}{\partial y}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 6.7. Si $\alpha \neq 0$, un point cuspidal est tout simplement une singularité de Bogdanov-Takens de codimension 2. Pour $\alpha = 0$, on retrouve les singularités de Bogdanov-Takens de toutes les codimensions finies. Mais on a plus : par exemple, le champ hamiltonien $y\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y}$ peut être considéré comme une singularité de Bogdanov-Takens de codimension infinie. Il possède des déploiements $\mathcal{C}^\infty$ de cyclicité infinie, de même, par exemple, qu'il existe des déploiements $\mathcal{C}^\infty$ du champ linéaire de rotation : $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ qui ont une cyclicité infinie. Par contre, chaque déploiement analytique de ces singularités a une cyclicité finie (voir [57]).

Les connections de selle $\mathcal{C}^\infty$ de codimension finie ont été évoquées dans le paragraphe 6.4.4. Les points cuspidaux de codimension finie, sous l'appellation de singularité de Bogdanov-Takens, ont été évoqués dans le paragraphe 6.2 pour la codimension 2, et dans les paragraphes 6.3.2 et 6.3.3 pour les autres cas de codimension finie. Il est clair que tous ces ensembles limites périodiques ont une cyclicité finie.

6.5.2. Le seizième problème de Hilbert infinitésimal

Le seizième problème de Hilbert infinitésimal concerne la bifurcation de cycles limites à partir des cycles d'un champ hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$. Le terme infinitésimal

vient du fait que ce problème est lié à l'étude de la partie principale des perturbations de champs hamiltoniens, à 1 paramètre $\varepsilon \sim 0$. Pour cette raison, on appelle aussi ce problème : problème de Hilbert tangentiel.

Le champ de vecteurs hamiltonien, de fonction hamiltonienne $H(x, y)$, est le champ $X_H(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$. Ce champ laisse la fonction H invariante. En fait, il est dual de la forme exacte dH. Rappelons que le champ $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ est le dual de la 1-forme différentielle $\omega = -Qdx + Pdy$ et qu'en tout point (x, y) on a $\omega(X)(x, y) = 0$.

On appelle cycle du champ X_H, ou bien de la fonction H, toute courbe simple (c'est-à-dire difféomorphe à S^1), composante connexe d'une ligne de niveau de H. Un tel cycle de H est une orbite périodique de X_H et vice-versa. Les cycles de H ne sont pas isolés mais forment des anneaux ouverts de $\mathbb{R}^2$. À la frontière d'un tel anneau, on peut trouver un centre ou bien un polycycle (pouvant contenir une partie du cercle à l'infini). Voir la figure 6.16.

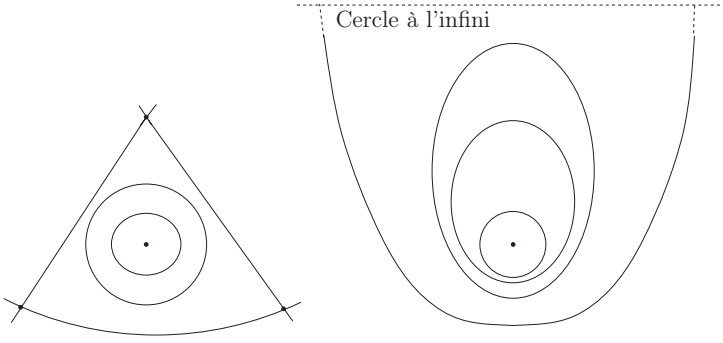


Figure 6.16. Anneaux hamiltoniens.

Un champ hamiltonien peut sembler exceptionnel. En effet, on sait que le champ $P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ de $\mathbb{R}^2$ est hamiltonien si et seulement si ses composantes vérifient la condition de divergence nulle : $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$. Cependant, on a de bonnes raisons de prendre en considération les champs hamiltoniens de $\mathbb{R}^2$. Tout d'abord, dans les familles de champs polynomiaux, ils existent pour des sous-ensembles algébriques de codimension finie de l'espace des paramètres. D'autre part, ils peuvent apparaître dans la désingularisation d'un germe de déploiement, comme on l'a vu dans le paragraphe 6.1.2 (voir (6.11)) pour la désingularisation du déploiement de la singularité de Bogdanov-Takens. En effet, par un éclatement, on a obtenu l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x}^2 - 1 + u\bar{y}(\xi \pm \bar{x}) \end{cases}$$

qui est une u-perturbation, avec $u \sim 0$, du champ hamiltonien $\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (\bar{x}^2 - 1)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$, de fonction hamiltonienne $\bar{x} - \frac{1}{3}\bar{x}^3 + \frac{1}{2}\bar{y}^2$, dont la différentielle est : $dH = (1 - \bar{x}^2)d\bar{x} + \bar{y}d\bar{y}$ (si H *est une fonction quelconque, la* 1*-forme différentielle* dH *est duale du champ hamiltonien* X_H).

Un champ hamiltonien ne possède évidemment pas de cycle limite. Mais si ce champ fait partie d'une famille, des cycles limites pour les champs voisins peuvent bifurquer à partir de ses cycles. C'est la question dont nous voulons parler dans ce sous-paragraphe. Commençons par un exemple élémentaire.

Exemple. Considérons la famille $X_\varepsilon = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon(1 - x^2 - y^2)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\big)$. Le champ X_0 est un champ hamiltonien, de fonction hamiltonienne $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Alors le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$ est un cycle du champ hamiltonien X_0 qui, pour $\varepsilon \neq 0$, devient un cycle limite du champ X_ε.

Soit $H(x, y)$ une fonction du plan de classe $\mathcal{C}^\infty$ et A un anneau ouvert du plan formé de cycles de H. Supposons que $H(A) =]h_1, h_2[$ avec $-\infty \leq h_1 < h_2 \leq +\infty$. Pour chaque $h \in]h_1, h_2[$, il existe un et un seul cycle dans A que nous désignerons par γ_h. Choisissons dans A une section Σ au champ hamiltonien X_H coupant chacun des cycles γ_h. Nous allons paramétrer Σ par $h \in]h_1, h_2[$ et identifier Σ avec $]h_1, h_2[$. On a alors que $\Sigma \cap \gamma_h = \{h\}$.

Soit maintenant X_ε une famille de champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $X_0 = X_H$. Choisissons un sous-intervalle compact quelconque $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$. Comme $\widetilde{\Sigma}$ est compact, une application de retour est définie de $\widetilde{\Sigma}$ vers Σ, pour le champ X_ε, à condition que $|\varepsilon|$ soit assez petit, disons pour $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, pour un certain $\varepsilon_0 > 0$. Soit $P(h, \varepsilon)$ cette application de Poincaré. On a :

$$P(h, \varepsilon) : \tilde{\Sigma} \mapsto \Sigma,$$

qui est une famille de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Clairement $P(h, 0) \equiv h$ puisque l'orbite de X_0 est le cycle γ_h.

La formule suivante, dite *formule de Poincaré-Pontriaguine*, précise le développement de P en ε à l'ordre 1 :

Proposition 6.2. *Soit* $\omega_\varepsilon = dH + \varepsilon\Omega + O(\varepsilon^2)$ *la famille de* 1*-formes différentielles duale de la famille* X_ε*. Nous avons :*

$$P(h, \varepsilon) = h + \varepsilon \int_{\gamma_h} \Omega + O(\varepsilon^2). \tag{6.20}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et $h \in \widetilde{\Sigma}$. Désignons par γ_h^ε le segment de trajectoire de X_ε partant de h jusqu'à son premier retour $P(h, \varepsilon)$ sur Σ (en particulier,

$\gamma_h^0 = \gamma_h$). Intégrons ω_ε sur γ_h^ε. Il vient :

$$\int_{\gamma_h^\varepsilon} \omega_h = \int_{\gamma_h^\varepsilon} dH + \varepsilon \int_{\gamma_h^\varepsilon} \Omega + O(\varepsilon^2), \tag{6.21}$$

car la longueur de γ_h^ε est uniformément bornée, disons en restreignant h à $\widetilde{\Sigma}$ et ε à l'intervalle $]-\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2}[$.

Dans l'identification $\Sigma \approx]-h_1, h_2[$, on peut écrire que $H(P(h,\varepsilon)) = P(h,\varepsilon)$. Comme $P(h,0) = h$, il s'ensuit la formule :

$$\int_{\gamma_h^\varepsilon} dH = P(h,\varepsilon) - h. \tag{6.22}$$

Enfin, comme la distance de Hausdorff entre γ_h^ε et γ_h est de l'ordre de $O(h)$, il vient :

$$\int_{\gamma_h^\varepsilon} \Omega = \int_{\gamma_h} \Omega + O(\varepsilon). \tag{6.23}$$

On obtient la formule (6.20) en substituant (6.22) et (6.23) dans (6.21) car $\int_{\gamma_h^\varepsilon} \omega_h = 0$. ∎

Soit $I(h)$ la fonction intégrale $\int_{\gamma_h} \Omega$. Une orbite périodique de X_ε coupe $\widetilde{\Sigma}$ au point $\{h\}$ si et seulement si $P(h,\varepsilon) - h = \varepsilon(I(h) + O(\varepsilon)) = 0$. Dans la recherche des cycles limites, on peut évidemment se limiter à $\varepsilon \neq 0$. *Pour* $\varepsilon \neq 0$, les valeurs de h correspondant à une intersection d'une orbite périodique avec $\widetilde{\Sigma}$ sont les racines de :

$$\frac{P(h,\varepsilon) - h}{\varepsilon} = I(h) + O(\varepsilon) = 0, \tag{6.24}$$

où la fonction $I(h) + O(\varepsilon)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x et ε. Si $I(h)$ n'est pas trop dégénérée, les orbites périodiques de X_ε bifurquent des cycles γ_h pour h racine de $I(h) = 0$ et, en particulier, des cycles limites bifurquent *en nombre fini* des cycles correspondant aux racines d'ordre fini. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 6.3. *Supposons que $h_0 \in \widetilde{\Sigma}$ soit une racine simple de I. Alors un cycle limite hyperbolique unique bifurque de γ_{h_0} (qui est attractant si $I'(h_0) < 0$ et répulseur si $I'(h_0) > 0$). Si h_0 est un zéro d'ordre $k < +\infty$, au plus k cycles limites bifurquent de γ_{h_0}.*

Ces résultats se généralisent facilement aux familles à plusieurs paramètres. Supposons, par exemple, que la famille $X_{\lambda,\varepsilon}$ dépende de $\lambda \sim \lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ et de

$\varepsilon \sim 0 \in \mathbb{R}$, et que $X_{\lambda,0} \equiv X_H$ soit un champ hamiltonien (supposé indépendant de λ, pour simplifier). La famille des 1-formes duales de la famille $X_{\lambda,\varepsilon}$ s'écrit

$$\omega_{\lambda,\varepsilon} = dH + \varepsilon\Omega_\lambda + O(\varepsilon^2), \tag{6.25}$$

où Ω_λ est une famille $\mathcal{C}^\infty$. L'application de Poincaré relative à la section $\widetilde{\Sigma}$ est une famille $\mathcal{C}^\infty$: $P(h,\lambda,\varepsilon)$. La formule (6.20) s'écrit

$$P(h,\lambda,\varepsilon) = h + \varepsilon \int_{\gamma_h} \Omega_\lambda + O(\varepsilon^2), \tag{6.26}$$

et la fonction intégrale $I_\lambda(h) = \int_{\gamma_h} \Omega_\lambda$ est une famille $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions de h dépendant du paramètre λ. La fonction $\frac{P(h,\lambda,\varepsilon)-h}{\varepsilon} = I_\lambda(h) + O(\varepsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à h, λ et ε. On peut alors donner le résultat de bifurcation suivant qui suit des résultats du paragraphe 5.5 :

Proposition 6.4. *Supposons que $h_0 \in \tilde{\Sigma}$ soit une racine d'ordre $p+1$ de I_{λ_0} (c'est-à-dire $I_{\lambda_0}(h_0) = \frac{dI_{\lambda_0}}{dh}(h_0) = \ldots = \frac{d^p I_{\lambda_0}}{dh^p}(h_0) = 0$ et $\frac{d^{p+1} I_{\lambda_0}}{dh^{p+1}}(h_0) \neq 0$). On suppose aussi que le déploiement défini par I_λ pour $h \sim h_0$ et $\lambda \sim \lambda_0$ soit un déploiement versel. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ fixé assez petit, un cycle limite de type selle-nœud de codimension p bifurque de γ_{h_0} et la λ-famille $X_{\lambda,\varepsilon}$ est un déploiement versel de $X_{\lambda_0,\varepsilon}$ au voisinage de ce cycle limite.*

Au vu des propositions précédentes, la question la plus importante est de savoir comment étudier les propriétés de la fonction intégrale I, en particulier, comment déterminer le nombre des zéros de I, comptés avec leur multiplicité ?

Le seul cas pour lequel on ait des résultats assez généraux est celui des champs polynomiaux de $\mathbb{R}^2$. Il revient au-même de considérer des 1-formes différentielles polynomiales. On considère donc une famille $\omega_{\lambda,\varepsilon}$ comme dans (6.25), que l'on suppose maintenant polynomiale.

Dans le cas où H et Ω_λ sont polynomiaux, la fonction intégrale $I_\lambda(h) = \int_{\gamma_h} \Omega_\lambda$ est appelée : *intégrale abélienne* (même s'il s'agit en fait d'une famille d'intégrales). Comme il est clair de par cette désignation, la théorie des intégrales abéliennes est ancienne. Cette théorie a connu un grand regain d'intérêt dans le cadre de l'étude des champs de vecteurs polynomiaux du plan, en raison de la formule de Poincaré-Pontriaguine (6.21) (ou (6.26)). Depuis son origine, la théorie des intégrales abéliennes s'est beaucoup appuyée sur les méthodes de l'analyse complexe. Nous allons nous contenter de reporter ici quelques résultats importants obtenus dans la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle, dans le cadre de l'étude des champs de vecteurs.

1. Considérons la famille $\bar{X}_{u,\xi}$ (6.11) obtenue dans l'éclatement du déploiement de Bogdanov-Takens. Pour simplifier et nous remettre dans les notations du présent paragraphe, remplaçons $\bar{x}, \bar{y}$ par x, y et u, ξ par ε, λ. Sous forme duale, cette famille s'écrit alors :

$$\omega_{\lambda,\varepsilon} = ydy - (x^2 - 1)dx - \varepsilon y\big(\lambda \pm x\big)dx.$$

La fonction hamiltonienne correspondante, pour $\varepsilon = 0$, est :

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + x.$$

Cette fonction possède des cycles γ_h pour $h \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$ formant un anneau de $\mathbb{R}^2$. La forme perturbatrice est $\Omega_\lambda = y\big(\lambda \pm x\big)dx$. L'intégrale abélienne $I_\lambda(h)$ associée est donc :

$$I_\lambda(h) = \lambda I_0(h) \pm I_1(h)$$

où, par définition, $I_i(h) = \int_{\gamma_h} yx^i dx$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont des intégrales abéliennes définies pour $h \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$. L'unicité du cycle limite bifurquant dans le déploiement de Bogdanov-Takens (6.14) suit du résultat suivant, d'abord établi par Bogdanov par une méthode d'analyse réelle (voir [57]), puis redémontré par Ilyashenko à l'aide d'une méthode d'analyse complexe :

Théorème 6.7. *La fonction $h \mapsto \frac{I_1}{I_0}(h)$ a une dérivée strictement négative sur l'intervalle $]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$.*

2. Le *seizième problème de Hilbert infinitésimal* a la formulation suivante :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de zéros isolés de chaque intégrale abélienne $\int_{\gamma_h} \Omega$, où γ_h est un cycle d'un hamiltonien polynomial H de degré $\leq n+1$ et Ω est une 1-forme polynomiale de degré $\leq n$, est borné par un nombre fini ne dépendant que de n (et non du choix de H et Ω).

Si $Z(n)$ est la borne supérieure de ce nombre de zéros, on voit donc que cette borne est la borne du nombre de cycles limites qui bifurquent des anneaux hamiltoniens, ce qui justifie le nom du problème.

Le seizième problème de Hilbert infinitésimal a été résolu en 1984 indépendamment par Varchenko et Khovanskii sous la forme énoncée plus haut. Ces preuves ne permettent pas d'estimer la borne $Z(n)$. Après beaucoup de

travaux donnant des estimations de $Z(n)$ dans des cas particuliers, une estimation de $Z(n)$ dans le cas général a été finalement obtenue par Yakovenko, Benayimi et Novikov en 2008 (le lecteur intéressé par la preuve pourra trouver les références des articles dans la liste des publications de S. Yakovenko). Ils ont obtenu que

$$Z(n) \leq 2^{P(n)},$$

où $P(n)$ est un polynôme de degré 61 dont les coefficients peuvent être déterminés par un algorithme algébrique. En fait, les auteurs ne donnent pas des valeurs explicites pour les coefficients de $P(n)$, quoique leur méthode le leur permettrait en principe. De fait, cette méthode ne donne qu'une borne très grossière, dont la connaissance explicite n'aurait probablement pas d'application pratique.

3. Trivialement on observe que $Z(1) = 0$. La valeur exacte de $Z(2)$ n'a été obtenue qu'après 2000, par Gavrilov, qui a montré que $Z(2) = 2$. Aucune autre valeur de $Z(n)$ n'est connue exactement.

La formule de Poincaré-Pontriaguine ne permet pas d'étudier, *a priori*, les cycles limites bifurquant du polycycle ou du centre situé à la frontière d'un anneau de cycles hamiltoniens, sauf dans le cas d'un centre quadratique de Morse. En effet, on a obtenu cette formule en restreignant l'application de retour à un intervalle compact strictement contenu dans la section ouverte associée à l'anneau. Pour étudier les cycles limites bifurquant, par exemple, d'un polycycle Γ dans la frontière de l'anneau, on doit étudier directement l'application de retour au voisinage de ce polycycle. La difficulté est que cette application n'est en général pas différentiable, par exemple en $h = 0$, si $\Gamma \subset \{H = 0\}$. On doit alors prendre en compte le type d'expansion qu'il est possible d'écrire pour l'application de retour en $h = 0$. Ceci a pu être mené à bien dans le cas de la connection de selle (voir le sous-paragraphe 6.4.4). Dans ce cas, les cycles limites bifurquant sont tous associés aux zéros de l'intégrale abélienne associée. Par contre, cela n'est plus en général le cas, dès que l'on considère des perturbations au voisinage d'un polycycle hyperbolique hamiltonien avec plus de deux sommets. Il peut alors bifurquer plus de cycles limites que de zéros de l'intégrale abélienne associée.

6.5.3. Difficulté d'une théorie de bifurcation globale

Afin de mettre en place une théorie de bifurcation globale pour les familles de champs sur S^2, on doit mettre ensemble les différents résultats locaux que nous avons introduits jusqu'à maintenant, concernant les bifurcations des divers ensembles limites périodiques : singularités, orbites périodiques, polycycles. Comme

on l'a déjà fait remarquer, la théorie des bifurcations n'est pas localisable en toute généralité, et une difficulté que l'on va rencontrer pour une théorie globale, est que les différentes études locales vont en quelque sorte interférer entre elles.

Pour illustrer cette idée, nous allons seulement donner un exemple d'interférence entre deux bifurcations très simples de codimension 1 : la connection hétérocline entre deux points de selle hyperboliques, et la bifurcation selle-nœud de codimension 1 d'orbite périodique, que l'on peut aussi appeler bifurcation (générique) d'une orbite semi-stable. Comme il s'agit d'un phénomème localisé dans un ouvert contenant les deux points de selle et l'orbite périodique, on peut supposer que notre famille est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$ paramétré par (θ, x).

On suppose que X_λ est une famille sur U, à paramètre $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}$, égale à $\frac{\partial}{\partial\theta} + (\lambda + x^2)\frac{\partial}{\partial x}$, dans un ouvert $W \subset S^1 \times \mathbb{R}$, contenant $S^1 \times [-\eta, \eta]$ (le cercle S^1 est paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Le champ X_0 a donc une orbite semi-stable $\gamma_0 = S^1 \times \{0\}$, qui bifurque en une bifurcation selle-nœud de codimension 1 : deux orbites périodiques bifurquent pour $\lambda < 0$, une stable $\gamma^s_\lambda = S^1 \times \{-\sqrt{-\lambda}\}$ et une instable $\gamma^u_\lambda = S^1 \times \{\sqrt{-\lambda}\}$.

Pour $\lambda > 0$, on n'a plus d'orbites périodiques dans W. Le flot de X_λ est transverse aux sections $\Sigma_- = S^1 \times \{-\eta\}$ et $\Sigma_+ = S^1 \times \{\eta\}$, paramétrées par θ. Entre ces deux sections, le flot de X_λ définit une transition T_λ. On peut calculer cette transition en intégrant explicitement le champ X_λ. La variation de θ entre les deux sections est égale à :

$$\tau(\lambda) = \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dx}{x^2 + \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\pi + O(\sqrt{\lambda})).$$

Cette variation est indépendante du choix du point initial $(\theta, -\eta) \in S^1 \times \{-\eta\}$. L'application de transition est donc une rotation de S^1 égale à :

$$T_\lambda(\theta) = \theta + \tau(\lambda).$$

(On identifie les deux sections à S^1, paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et T_λ à une application de S^1 dans S^1.)

On suppose que X_λ a deux points s_1, s_2 de selles hyperboliques dans U (indépendants de λ), à l'extérieur de W, avec les propriétés suivantes :

1. Le point s_1 du côté $\{x < 0\}$ et le point s_2 du côté $\{x > 0\}$.

2. Pour tout λ, le point de selle s_1 de X_λ a une séparatrice instable $W^u(s_1)$ qui aboutit au point $q_1 = (-\eta, 0)$. On suppose que l'arc de $W^u(s_1)$ entre s_1 et q_1 ne rencontre $S^1 \times [-\eta, \eta]$ qu'en q_1.

3. Pour tout λ, le point de selle s_2 de X_λ a une séparatrice stable $W^s(s_2)$ qui aboutit au point $q_2 = (\eta, 0)$. On suppose que l'arc de $W^s(s_2)$ entre s_2 et q_2 ne rencontre $S^1 \times [-\eta, \eta]$ qu'en q_2.

On voit maintenant que l'on aura une connection de type connection hétérocline entre s_1 et s_2 chaque fois que $T_\lambda(0) = 0$ modulo 1, c'est-à-dire pour une suite de valeurs $(\lambda_n) \to 0$. La valeur λ_n est définie par la condition $n = \tau(\lambda_n)$, ce qui donne une valeur unique $\lambda_n = \frac{\pi^2}{n^2}\big(1 + O(\frac{1}{n})\big)$. Pour cette valeur λ_n, la trajectoire de X_{λ_n} qui va de q_1 à q_2, et qui est donc une connection de selle entre s_1 et s_2, fait n tours dans l'anneau $S^1 \times [-\eta, \eta]$ dans la direction des θ croissants (figure 6.17).

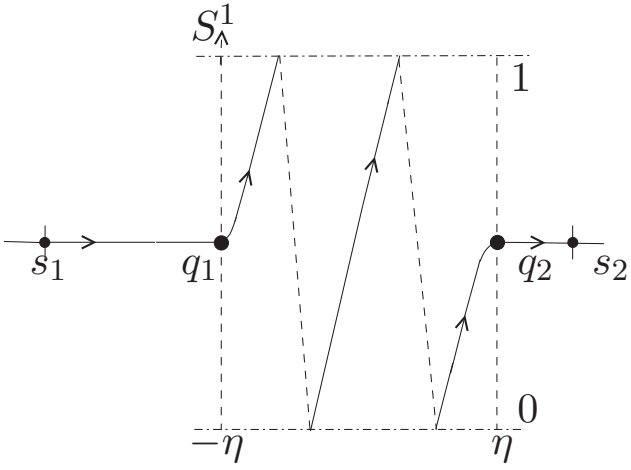


Figure 6.17. Connections de selle s_1, s_2 pour $n = 2$.

On voit donc que l'intervalle I du paramètre λ, sur lequel est définie la famille, contient une infinité de bifurcations de type connection hétérocline de codimension 1, s'accumulant sur une bifurcation de type selle-nœud d'orbite périodique de codimension 1. Et pourtant, la famille est stable et verselle pour le champ X_0 restreint à un ouvert U bien choisi.

Pour décrire les bifurcations globales verselles, on doit donc renoncer en général à la vision simple, suggérée par les bifurcations locales verselles que l'on a décrites dans les paragraphes précédents, d'un diagramme de bifurcation qui est homéomorphe à un ensemble algébrique, union d'un nombre fini de strates qui sont des sous-variétés de l'espace des paramètres.

This page intentionally left blank

7

LE SYSTÈME DE LORENZ

Le système que nous allons sommairement étudier a été proposé par E. Lorenz en 1963. Ce système modélise un phénomène de convection : l'échauffement d'un fluide (qui peut être l'air) par une plaque chauffante (qui peut être le sol de la terre réfléchissant les rayons du soleil) jusqu'au développement de la convection. À plus ou moins long terme, le système n'est plus prévisible et la solution est chaotique, avec une grande sensibilité aux conditions initiales et donc une perte de prévisibilité (voir le chapitre d'introduction 1). Le présent chapitre fait le lien entre les équations aux dérivées partielles, ce que l'on appelle les problèmes en dimension continue, et les équations différentielles, qui sont des problèmes à un nombre fini de degrés de liberté. Les comportements des solutions des équations aux dérivées partielles seront mieux compris si la compréhension des comportements des solutions des équations différentielles progresse.

À l'issue de la modélisation de ces phénomènes de convection, sujet partiel de ce chapitre, on se ramène à un système différentiel $X_{a,b,r}$. Ce système est une famille de champs de vecteurs polynomiaux quadratiques (de degré 2) dans $\mathbb{R}^3$. Malgé la simplicité de son écriture, l'étude complète de la dynamique générée par $X_{a,b,r}$ est un problème loin d'être résolu. Ce modèle de dimension 3 est probablement l'un des systèmes dynamiques qui a été le plus étudié, avec plusieurs centaines de publications. Des livres entiers lui ont été consacrés ([65] par exemple). Encore aujourd'hui, il est l'objet de travaux actifs. Le chaos a été numériquement observé par Lorenz dans le flot de $X_{a,b,r}$ pour certaines valeurs du paramètre. Un modèle théorique, dit attracteur géométrique de Lorenz, et les propriétés de ce modèle ont été étudiés dans de nombreux travaux (voir [65] par exemple). La preuve mathématique de l'existence de cet attracteur dans le modèle de Lorenz n'a été faite qu'en 1999 par W. Tucker [72] (l'attracteur de Lorenz est en réalité un attracteur non hyperbolique, aussi appelé attracteur étrange).

Dans ce chapitre, nous n'allons pas nous intéresser à l'attracteur géométrique de Lorenz et nous renvoyons à [65] par exemple. Nous allons nous limiter à présenter quelques fragments de l'étude de ce système très complexe, en relation directe avec le chapitre 5.

7.1. Les équations de la convection

Considérons une couche horizontale de fluide d'extension infinie, de hauteur d uniforme, chauffée à sa partie inférieure. On fait l'hypothèse que les parties inférieure et supérieure de la couche de fluide sont maintenues à température constante, si bien que l'écart des températures entre ces surfaces est maintenu à une valeur constante égale à θ. Un tel système possède un état stationnaire pour lequel il n'y a aucun mouvement de fluide et la température varie linéairement avec la hauteur. Le fluide est en équilibre. Au bout d'un certain temps de chauffage, on observe que le fluide se met en mouvement spontanément. C'est le démarrage de la convection (ici la thermoconvection) qui va ensuite se développer. Ce phénomène est très important en météorologie, en océanographie et en géophysique plus généralement.

Le domaine est repéré par le système orthogonal usuel Ox, Oy et Oz d'origine le point O. Dans l'approximation de *Boussinesq*, usuellement utilisée dans le domaine de la physique des fluides, on considère que le fluide a une masse volumique ρ constante, ce qui revient à écrire qu'il est incompressible (ceci est traduit par la deuxième des équations (7.1) ci-dessous). Les équations adimensionnelles (i.e. avec des variables sans dimension) que nous allons considérer décrivent essentiellement le transport couplé de la quantité de mouvement du fluide (à travers sa vitesse $\vec{V}$ de composantes u, v et w dans les directions Ox, Oy et $0z$) et de la chaleur grâce à l'écart θ de température. La variable θ est la différence des températures entre l'état d'équilibre pris à l'instant initial (la température, en un point du domaine spatial, *au début* de la convection, étant prise comme origine) et l'état convectif à l'instant t. Ces équations sont :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}\right) = -\nabla p + \theta\vec{\lambda} + \nabla^2\vec{V} && (1)\\ &\nabla\vec{V} = 0 && (2)\,,\\ &\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\theta = R_a\vec{\lambda}.\vec{V} + \nabla^2\theta && (3) \end{aligned} \qquad (7.1)$$

où p est la pression, $\vec{\lambda}$ est un vecteur de composantes $(0,1)$ dans le plan (Ox,Oz), $P_r = \frac{\nu}{D_T}$ est le nombre de *Prandtl* du fluide, où ν désigne la viscosité cinématique et D_T la diffusion thermique. Le nombre de *Rayleigh* $R_a = \frac{g\alpha d^3}{\nu D_T}\theta$, où α est le coefficient de l'expansion thermique et g est l'accélération de la pesanteur, gouverne

globalement le système, essentiellement via la différence de température θ. On peut s'étonner de l'absence de la masse volumique ρ dans les équations adimensionnées et l'expression du nombre de Rayleigh, même si elle est constante dans l'approximation de Boussinesq, mais en fait elle est « cachée » dans le terme ν, car $\nu = \eta/\rho$, où η est la viscosité dynamique caractéristique. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles peu évidentes à analyser. L'objectif est alors de les approcher par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, qui rendent compte de façon satisfaisante du comportement instable (la convection) de la solution. Pour des compléments sur l'établissement des équations (7.1), nous prions le lecteur de consulter B. Saltzman [60].

Pour construire le système d'équations différentielles E. Lorenz utilise, sans la mentionner comme telle, la *méthode de Galerkin*, aujourd'hui classique, appelée encore *méthode d'approximation variationnelle* ou *méthode de Ritz* qui consiste à développer la solution en série, selon des fonctions de base (les modes) indépendantes et appropriées, dans le cadre de la formulation variationnelle du problème (voir par exemple Ciarlet [14], Raviart, Thomas [56]). Dans la modélisation des phénomèmes géophysiques, cette approche est devenue standard, aussi la présentons-nous dans son principe.

7.2. Formulation et approximation variationnelles

Décrivons rapidement les principes de la formulation variationnelle et de l'approximation variationnelle associée, très souvent utilisés dans l'étude et le calcul numérique des solutions des équations aux dérivées partielles. Cette approximation s'appuie sur la formulation faible de ces équations, dite *formulation variationnelle* du problème. Pour montrer sa mise en œuvre, considérons, par exemple, le problème de Dirichlet pour le laplacien en dimension deux (la dimension n ne pose aucune difficulté supplémentaire), ce qui revient à introduire l'opérateur de Laplace (ou laplacien) $\Delta = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ en notant par x_1 et x_2 les variables d'espace. Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ et une fonction f donnée, on cherche une fonction u solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} . \tag{7.2}$$

Imposer à la solution une condition à la limite, ici l'annulation de u sur la frontière Γ, signifie que l'on s'intéresse à un *problème de Dirichlet*.

On cherche la solution u dans un « bon » espace V permettant à la solution de satisfaire au moins à la condition à la limite sur Γ. Dans le cas considéré, on

impose à l'espace fonctionnel V de contenir au moins les fonctions nulles au bord Γ du domaine Ω.

On multiplie alors scalairement la première équation par une fonction « test » $v \in V$, et on intègre sur Ω. On a :

$$-\int_\Omega \Delta u.v dx = \int_\Omega f.v dx. \tag{7.3}$$

On applique maintenant la formule de Green. On donne cette formule formellement sans préciser dans quels espaces et sous quelles conditions elle est licite :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u.v\nu_i d\sigma \tag{7.4}$$

où ν_i est le i-ème cosinus directeur de la normale, dirigée vers l'extérieur de Ω, à la frontière Γ et $d\sigma$ une mesure sur Γ.

Par la formule (7.4), on a donc

$$-\int_\Omega \Delta u.v dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \sum_{i=1}^{2} \left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v\nu_i d\sigma \right).$$

On obtient donc la formule de Green pour le laplacien :

$$-\int_\Omega \Delta u.v dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma, \tag{7.5}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i$ est la dérivée normale de u à la frontière du domaine.

Par hypothèse, $v \in V$. D'après la définition de V, on a $v = 0$ sur Γ, et la formule (7.5) donne

$$-\int_\Omega \Delta u.v dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \tag{7.6}$$

Reprenons maintenant (7.3). D'après (7.6), il vient donc

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f.v dx. \tag{7.7}$$

Après cette mise en forme, le problème (7.2) est remplacé par celui de trouver une fonction $u \in V$ vérifiant la *formulation variationnelle* suivante

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in V \tag{7.8}$$

avec $a(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$.

L'écriture de la forme $a(u,v)$ dépend du problème traité, c'est-à-dire de l'opérateur et de la condition à la limite considérés, mais le principe est souvent le même, aux difficultés techniques près, difficultés qui peuvent être très importantes. Nous avons ici affaire dans l'écriture de $a(u,v)$ à des produits scalaires de fonctions $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ désignant l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω au sens de Lebesgue. Ces intégrales imposent des conditions à la définition de l'espace V dans lequel on cherche la solution, pour donner mathématiquement un sens à l'expression de $a(u,v)$.

Pour le problème considéré, la forme a est linéaire en u et en v, donc bilinéaire en (u,v).

Sous des hypothèses appropriées, dont la vérification est plus ou moins technique selon l'espace V dans lequel on cherche la solution, le problème (7.8) a une solution unique. La théorie, très développée, est hors du propos de cet ouvrage. Le lecteur intéressé pourra consulter [56] par exemple.

La méthode de l'approximation variationnelle consiste alors à se donner un sous-espace V_h de dimension finie de l'espace V, et le problème *discret* associé revient à trouver la solution approchée $u_h \in V_h$ telle que

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h. \tag{7.9}$$

On montre facilement, sous les hypothèses portant sur la forme a, que le problème (7.9) de dimension finie a une solution unique. Soit $(w_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de V_h, les w_i sont parfois appelées les *fonctions de forme* ou *modes*. On cherche u_h sous la forme $u_h = \sum_{i=1}^{m} u_i w_i$ où les u_i sont les composantes de u_h dans la base $(w_i)_{1\leq i\leq m}$. Le choix des (w_i) doit permettre à la solution approchée u_h de satisfaire aux conditions aux limites du problème. On écrit (7.9) pour tout $v_h = w_j$, $1 \leq j \leq m$. La solution approchée $u_h = (u_i)_{1\leq i\leq m}$ est alors la solution du système linéaire $Au_h = b$, où A est une matrice $m \times m$ d'éléments $a(w_i, w_j)$ et b est le vecteur de composantes (f, w_j). Il est souhaitable, pour éviter une intégration numérique source supplémentaire d'erreurs, que les fonctions de forme w_i permettent un calcul exact et facile des termes $a(w_i, w_j)$ soit, pour le problème considéré illustrant la formulation variationnelle, $a(w_i, w_j) = \sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} dx$.

7.3. Considérations générales

Le système d'équations aux dérivées (7.1) auquel nous avons affaire est non linéaire et couplé en les variables de température θ et de vitesse $\vec{V}$. Enfin, ces équations dépendent à la fois du temps et de l'espace. Elles sont évidemment bien

plus compliquées que le laplacien et l'écriture de la forme variationnelle associée est beaucoup moins simple, étant donné le couplage de la température θ et de la vitesse $\vec{V}$. Cette écriture, pour autant qu'elle existe (dans quel espace, avec quelles propriétés ?), n'est pas le sujet de ce chapitre. Cependant la forme variationnelle est utilisée en filigrane dans ce qui suit. Les considérations suivantes sont tout à fait compatibles avec la formulation variationnelle du problème, même si celle-ci n'est pas explicitement écrite.

Le problème est de sélectionner des modes en nombre fini (pour rendre possibles les calculs) de façon à rendre compte correctement de l'instabilité du système, par exemple à décrire et/ou estimer de façon qualitative les comportements de la couche convective. Quelques règles régissent cette sélection des modes.

(i) Il est nécessaire de ne pas introduire d'instabilité parasite. C'est une contrainte non évidente en dynamique non linéaire, même dans les cas simples. Par exemple, soit l'équation non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = x^2,$$

qui a pour solution

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - tx(0)}.$$

On voit que la solution présente une singularité pour $t = \frac{1}{x(0)}$, ce qui est un temps positif dès que $x(0) > 0$. La physique devrait permettre d'éliminer de telles conditions initiales problématiques ; cependant, dans des calculs approchés, il n'est pas facile de s'assurer que l'introduction de telles approximations ne s'accompagne pas de l'apparition d'instabilités artificielles.

(ii) Il est souhaitable évidemment de préserver les propriétés d'invariance des équations de départ lorsque celles-ci en possèdent. C'est en particulier le cas des équations de bilan de toutes les variables soumises à un principe de conservation (masse, quantité de mouvement, etc.). Ce n'est pas toujours aisé ! De plus, il est nécessaire que les modes permettent à la solution approchée de satisfaire les conditions aux limites.

(iii) Il est bien entendu essentiel de construire des équations tronquées aussi proches que possible des équations initiales pour minimiser l'erreur commise. Ce qui veut dire que pour les équations de Rayleigh-Bénard ci-dessus, il convient *a priori* de prendre le maximum possible de fonctions de base (les modes de Fourier en l'occurence, comme on va le voir), ce maximum étant compatible avec la réalisation effective du calcul.

7.4. Hypothèses du modèle de Lorenz et construction appropriée des fonctions de base

La construction du modèle de Lorenz à partir du système (7.1) tient compte essentiellement des points (i) et (ii). Par contre, le point (iii) est remplacé par l'exigence d'une simplification maximale de la représentation de la dynamique et donc des calculs. *A priori*, ce n'est pas très justifié, mais l'abondance des résultats obtenus donne, *a posteriori*, une crédibilité à cette simplification.

Compte tenu des conditions aux limites ci-après et du fait qu'il s'agit de simuler des rouleaux de convection, il est approprié d'utiliser des modes de Fourier. Le modèle de Lorenz originel prend en compte très peu de ces modes. Donnons les idées de la construction du modèle non linéaire de Lorenz construit à partir des équations (7.1).

La simplification la plus naturelle consiste à envisager uniquement la situation où les mouvements convectifs (les « rouleaux »), apparaissant après l'instabilité de Rayleigh-Bénard, sont tous parallèles dans le plan (Ox, Oz) et perpendiculaires à l'axe Oy. Par conséquent, le vecteur vitesse de tout élément de fluide est toujours perpendiculaire à l'axe Oy de ces rouleaux et la composante v de la vitesse $\vec{V}$ selon l'axe Oy est nulle. Ainsi, il y a une invariance en y des variables qui, par là-même, ne dépendent que de deux variables d'espace : la hauteur z d'une part, la coordonnée horizontale x d'autre part (figure 7.1). Les composantes u et w de la vitesse $\vec{V}$ et l'écart de température θ dépendent donc des seules variables (x, z, t). L'équation d'incompressibilité (2) du système d'équations (7.1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + w_z = 0. \tag{7.10}$$

Introduisons la fonction de courant de Lagrange $\psi(x, z, t)$ dont la vitesse $\vec{V}$ du fluide se déduit par la relation $\vec{V} = \mathrm{rot}\psi$, à savoir $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Alors l'équation (7.10) est automatiquement satisfaite. De plus on a : $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \Delta\psi$.

Remarque 7.1. Considérons la première équation du système (7.1). En l'écrivant composante par composante et en considérant uniquement les termes $\frac{\partial V}{\partial t}$ et ∇p (pour simplement donner une idée), on obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}.$$

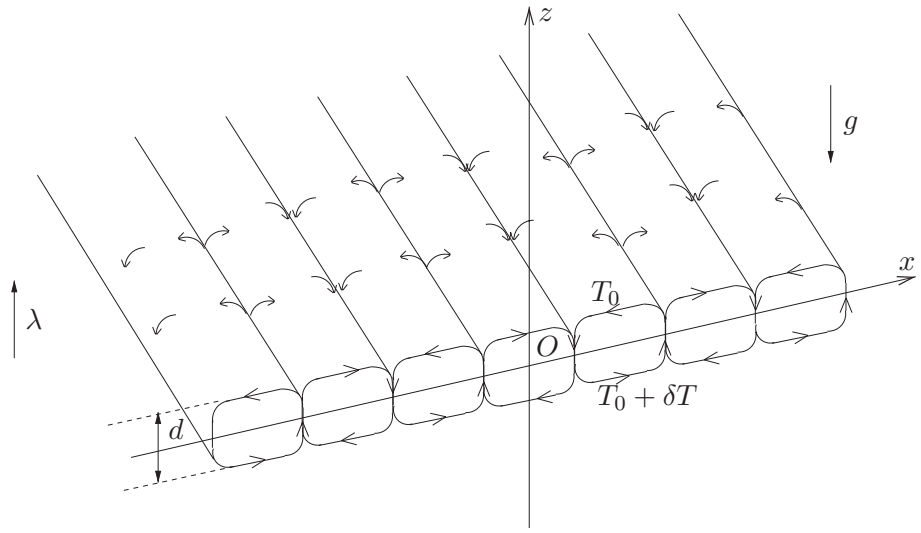


Figure 7.1. L'épaisseur suivant l'axe Oz est prise égale à l'unité de longueur ($d = 1$). Ainsi les faces supérieures et inférieures des rouleaux ont pour cotes respectives $z = \frac{1}{2}$ et $z = -\frac{1}{2}$. Le gradient de température est de sens opposé au champ de gravité.

Éliminons les termes de pression, en prenant la dérivée en z (resp. en x) de la première (resp. seconde) équation, puis en les soustrayant. Il vient $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi$. On retrouve le premier membre de l'équation (17) de la publication d'E. Lorenz [40]. On vérifie, de même, que l'on peut retrouver l'écriture des autres termes de cette équation (17), à partir du système (7.1) que nous considérons.

7.4.1. Les conditions limites

Le champ de vitesse doit évidemment satisfaire aux conditions imposées sur les surfaces inférieures (resp. supérieures) des rouleaux de hauteur $z = -\frac{1}{2}$ (resp. $z = \frac{1}{2}$) (figure 7.1 et sa légende). On suppose qu'il n'y a aucun flux de matière à travers ces surfaces, ce qui revient à imposer $w|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$. Cette première hypothèse implique que $\frac{\partial w}{\partial x}|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$. On impose aussi que chaque surface est « libre », c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement s'annulent sur les surfaces $z = \pm\frac{1}{2}$. On a donc $\sigma_{zx} = \mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) = 0$ où μ est le coefficient de viscosité de cisaillement ; comme $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur les surfaces, la relation $\sigma_{zx} = 0$ implique que $\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$ ou encore $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$. On considère que le liquide s'étend à l'infini à l'horizontale et que la structure de la convection est périodique dans la direction Ox.

7.4.2. Construction modale des fonctions ψ et θ

On voit immédiatement que les deux conditions aux limites $w|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$ reviennent à se donner une fonction ψ vérifiant $\psi|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$. La dépendance en z de la fonction ψ est trivialement vérifiée par des termes du type $\cos((2k+1)\pi z), k \geq 0$. Comme de plus les lignes de niveau de la fonction ψ sont les lignes de courant du champ de vitesse, la fonction ψ doit reproduire l'allure attendue des rouleaux de convection dans la direction horizontale Ox. On rend compte de cette condition à l'aide d'un terme du type $\sin(qx)$ de période $2\pi/q$, prenant en compte le comportement de la solution dans la direction Ox. La décomposition en modes de Fourier est donc particulièrement adaptée au développement de la solution. En se limitant arbitrairement à un seul terme, celui relatif à $k = 0$, on considère donc une fonction ψ telle que

$$\psi(x, z, t) = A(t)\cos(\pi z)\sin(qx), \tag{7.11}$$

qui donne les deux expressions suivantes pour les deux composantes u et w du champ de vitesse

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \pi A(t)\sin(\pi z)\sin(qx), \tag{7.12}$$

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial x} = qA(t)\cos(\pi z)\cos(qx). \tag{7.13}$$

La seule « vraie » variable est maintenant la fonction $A(t)$.

Réécrivons la première équation du système (7.1) dans les deux coordonnées d'espace x et z. Comme le vecteur $\vec{\lambda}$ a pour composantes $(0, 1)$ dans le plan (Ox, Oz), il vient :

$$\frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u, \tag{7.14}$$

et

$$\frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + \theta. \tag{7.15}$$

Prenons le rotationnel de la première équation du système (7.1), ce qui revient à faire l'opération $\frac{\partial}{\partial z}(7.14) - \frac{\partial}{\partial x}(7.15)$. Il vient :

$$\frac{1}{P_r}\left[\frac{-\partial(\Delta\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(uu_x + wu_z) - \frac{\partial}{\partial x}(uw_x + ww_z)\right] = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\partial}{\partial z}(\Delta u) - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \theta_x = -\Delta^2\psi - \theta_x. \tag{7.16}$$

Remarque 7.2. Nous avons déjà vu à la remarque 7.1 que l'on retrouve (heureusement !), aux coefficients près, l'équation (17) de [40].

Toujours dans la perspective de la construction de fonctions de base appropriées, il nous faut aussi choisir une « bonne » expression pour la variable θ. Comme cette variable est couplée au champ de vitesse par l'équation (3) du système (7.1) et par (7.16), il est naturel de lui assigner une même périodicité que la vitesse en la variable x. Ainsi, on impose à θ d'avoir une dépendance en x identique à la composante w de la vitesse, composante parallèle à l'axe Oz (on choisit cette composante puisque la température, appréciée par son écart θ, varie de bas en haut). De plus, on suppose que la température est fixée de façon constante sur les deux faces, ce qui revient à dire que l'écart de température θ est nulle sur celles-ci, à savoir $\theta|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$. Cette dernière condition amène un terme en $\sin(2\pi z)$.

Au total, en modélisant θ par

$$\theta(x, z, t) = \theta_1(t)\cos(\pi z)\cos(qx) + \theta_2(t)\sin(2\pi z), \tag{7.17}$$

les deux conditions ci-dessus sont respectées. Le terme $\theta_2(t)\sin(2\pi z)$ est nécessaire pour prendre en compte une partie des non linéarités comme cela apparaîtra dans les calculs. La décomposition (7.17) en deux modes de la température n'est évidemment pas la seule possible : le deuxième terme pourrait être en $\sin(2k\pi z)$ avec $k \geq 2$.

Avec cette modélisation des composantes u et w de la vitesse donnée par (7.14) et (7.15), puis de la température par (7.17), les seules inconnues du problème sont les fonctions $A(t)$, $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ qui dépendent uniquement du temps t. Les trois fonctions de base sont les fonctions $\cos(\pi z)\cos(qx)$, $\sin(\pi z)\sin(qx)$ et $\sin(2\pi z)$. Elles satisfont aux conditions aux limites. En conséquence, une solution approchée, développée en série avec ces fonctions, satisfait aussi à ces mêmes conditions.

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable au sens de Lebesgue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est l'espace naturel pour travailler avec les développements en série de Fourier. Notons que les fonctions de base sont indépendantes, car elles sont orthogonales au sens du produit scalaire $L^2([c,d]\times[a,b])$ défini par $(f,g) = \int_c^d \int_a^b f(x,z)g(x,z)dxdz$ (dans le modèle on travaille dans $L^2([c,d]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$; rappelons que nous avons imposé que $z \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ sans préciser l'intervalle de définition de x).

En effet, il vient par exemple que :

$$\int_c^d \int_a^b \cos(\pi z)\cos(qx)\sin(2\pi z)dxdz = \ldots$$

$$\ldots = \int_c^d \cos(qx)dx \left(\int_a^b \cos(\pi z)\sin(2\pi z)dz \right)$$

et un calcul élémentaire montre que la dernière intégrale en « z » est nulle si $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$. Cette propriété d'orthogonalité des fonctions de base n'est pas nécessaire à l'approximation variationnelle, mais elle en facilite beaucoup la mise en œuvre. C'est l'un des avantages de l'usage des modes de Fourier dans le cadre de cette approximation.

Il s'agit maintenant de déterminer le système d'équations différentielles qui régit le comportement temporel des trois variables A, θ_1 et θ_2.

7.5. Le modèle de Lorenz

Soit les expressions de ψ, θ, u et w données respectivement par (7.11), (7.17), (7.14) et (7.15) dans (7.16). De calculs faciles, il suit que les fonctions u et w et leurs dérivées s'expriment uniquement en fonction de ψ et de ses dérivées. On obtient les expressions suivantes :

$$uu_x + wu_z = \pi^2 q A^2 \sin(qx)\cos(qx),$$

et

$$uw_x + ww_z = -\pi^2 q A^2 \sin(\pi z)\cos(\pi z).$$

Dès lors, on a $\frac{\partial}{\partial z}(uu_x + wu_z) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x}(uw_x + ww_z) = 0$. Comme $\Delta\psi = -A(\pi^2 + q^2)\cos(\pi z)\sin(qx)$, $\Delta^2\psi = A(\pi^2 + q^2)^2\cos(\pi z)\sin(qx)$, et $\theta_x = q\theta_1\cos(\pi z)\sin(qx)$ (compte tenu de l'équation (7.17)), l'équation (7.16) implique

$$\frac{1}{P_r}\frac{dA}{dt} = -A(\pi^2 + q^2) + \frac{q\theta_1}{\pi^2 + q^2}, \tag{7.18}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre en A couplée avec θ_1.

Considérons maintenant la troisième équation du système (7.1). Comme la vitesse $\vec{V}$ dépend de θ, le terme $\vec{V}.\nabla\theta = u\theta_x + w\theta_z$ est un terme non linéaire. Compte tenu des expressions (7.12) et (7.13) des composantes u et w de $\vec{V}$ et de la modélisation (7.17) de θ, on vérifie que

$$\vec{V}.\nabla\theta = -\pi q A\theta_1\frac{\sin(2\pi z)}{2} + \pi q A\theta_2\left[\cos(\pi z) + \cos(3\pi z)\right]\cos(qx). \tag{7.19}$$

On voit que le terme en θ_2 prend bien en compte au moins une partie des non linéarités. Puisque $\vec{\lambda}\vec{V} = w = \psi_x = qA\cos(\pi z)\cos(qx)$, $\nabla^2\theta = -\theta_1(\pi^2 + q^2)\cos(\pi z)\cos(qx) - 4\pi^2\theta_2\sin(2\pi z)$ et en tenant compte de (7.19), il vient d'après

la troisième équation du système (7.1) :

$$(E)\begin{cases} \frac{\partial\theta_1}{\partial t}\cos(\pi z)\cos(qx) + \frac{\partial\theta_2}{\partial t}\sin(2\pi z) - \frac{1}{2}\pi qA\theta_1\sin(2\pi z) + \dots \\ +\pi qA\theta_2\left[\cos(qx)\cos(\pi z) + \cos(qx)\cos(3\pi z)\right] = \\ R_a[qA\cos(\pi z)\cos(qx)] - \theta_1(\pi^2+q^2)\cos(\pi z)\cos(qx) - 4\pi^2\theta_2\sin(2\pi z). \end{cases}$$

Conformément au principe de la méthode variationnelle, on multiplie scalairement les deux membres de l'équation (E) par la fonction de base $\cos(\pi z)\cos(qx)$. Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions de base dans l'espace $L^2([c,d]\times[a,b])$ lorsque $a=-\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$, on sait déjà que

$$\int_c^d\int_a^b \cos(\pi z)\cos(qx)\sin(2\pi z)dxdz = 0,$$

et on vérifie que $\int_a^b \cos(3\pi z)\cos(\pi z)dz = 0$. De plus on voit que

$$\int_c^d\int_a^b \cos^2(\pi z)\cos^2(qx)dxdz \neq 0.$$

Finalement, il vient :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\pi qA\theta_2 + R_aqA - \theta_1(\pi^2+q^2). \tag{7.20}$$

De même on multiplie scalairement l'équation (E) par la fonction de base $\sin(2\pi z)$, comme $\int_a^b \sin(2\pi z)dz \neq 0$ et $\int_a^b \cos(3\pi z)\sin(2\pi z)dz = 0$, il vient

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{2}\pi qA\theta_1 - 4\pi^2\theta_2. \tag{7.21}$$

Ainsi nous avons obtenu un système (7.18), (7.20) et (7.21) d'équations différentielles non linéaires du premier ordre en t, dont la résolution donnera le comportement dynamique de la vitesse $\vec{V}$ et de la variable θ ; le comportement spatial est donné par la dépendance des fonctions de base dans les variables d'espace x et z.

Remarque 7.3. La technique qui consiste à exprimer la solution en série de fonctions de bases (même avec peu de termes dans la série !), puis à utiliser un produit scalaire, dans un « bon » espace dans lequel ces fonctions sont orthogonales, de façon à pouvoir identifier les termes de la série, est la méthode d'approximation variationnelle ou *méthode de Galerkin* que nous avons évoquée au paragraphe 7.2. Ci-dessus, nous avons utilisé implicitement (sans l'écrire) la forme variationnelle du problème continu.

Le système obtenu n'est pas encore celui étudié par Lorenz. Effectuons le changement de variable $\widetilde{t} = (\pi^2 + q^2)t$, $X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(\pi^2+q^2)}A$, $Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2+q^2)^3}\theta_1$ et $Z = \frac{\pi q^2}{(\pi^2+q^2)^3}\theta_2$, on obtient finalement le modèle de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{X} = P_r(Y - X) \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}, \tag{7.22}$$

avec $r = \frac{q^2}{(\pi^2+q^2)^3}R_a$ et $b = \frac{4\pi^2}{\pi^2+q^2}$.

Dans ces formules, $\dot{\Xi}$ désigne la dérivée de Ξ par rapport à $\widetilde{t}$. La non linéarité provient des termes quadratiques XZ et XY. Le nombre r est le nombre relatif de Rayleigh, il est simplement appelé nombre de Rayleigh dans la suite.

Remarque 7.4. On vérifie que le système de Lorenz est invariant par la symétrie $(X, Y, Z) \mapsto (-X, -Y, Z)$, c'est-à-dire par une rotation de π autour de l'axe Oz.

Remarque 7.5. Le modèle de Lorenz que nous venons de construire impose des contraintes sur les valeurs des paramètres. Par exemple $b = \frac{4\pi^2}{\pi^2+q^2}$ est limité par le nombre 4 quel que soit q. Lorenz a choisi $b = 8/3$ (ce qui impose une valeur au nombre q) dans ses simulations numériques.

Remarque 7.6. Le système (7.22) est une approximation relativement grossière du système d'équations aux dérivés partielles (7.1) : par exemple les conditions aux limites imposées *ipso facto* par les fonctions de base sont peu réalistes. Cependant, certains comportements des solutions du système de Lorenz sont proches de ceux que l'on observe expérimentalement en thermoconvection.

7.6. Étude partielle du modèle de Lorenz

Le système (7.22) est l'équation différentielle d'une famille de champ de vecteurs quadratiques de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $X_{a,b,r}$ de paramètre $(a, b, r) \in \mathbb{R}^3$, en posant $a = \mathrm{P_r}$.

7.6.1. Propriété de confinement du flot de $X_{a,b,r}$

Les paramètres sont tous arbitrairement fixés dans ce sous-paragraphe et on ne les mentionnera pas dans l'écriture. On notera

$$\varphi(t, m) = (X(t, m), Y(t, m), Z(t, m))$$

le flot de $X_{a,b,r}$, c'est-à-dire que l'on considère pour tout $m \in \mathbb{R}^3$, la trajectoire maximale par m. On veut étudier le comportement asymptotique du flot lorsque $t \to \infty$. Opérons dans (7.22) le changement de variable $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y$ et $Z \mapsto Z + r + a$, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{X} + aX - aY &= 0 \\ \dot{Y} + aX + Y + XZ &= 0 \\ \dot{Z} + bZ - XY &= -b(r+a) \end{aligned} \quad . \tag{7.23}$$

Considérons le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$, ainsi $\langle \varphi, \varphi \rangle = X^2 + Y^2 + Z^2$, et la norme associée (que nous notons $|\cdot|$). On a $|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle$ et $\frac{\partial}{\partial t}|\varphi|^2 = 2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} + 2Z\dot{Z}$. Multiplions chacune des équations (7.23) respectivement par X, Y et Z. La condition initiale m étant fixée, on ne l'indiquera plus dans l'écriture et l'on pose $\varphi(t, m) = \varphi(t)$. Par addition, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi|^2 + P_r X^2 + Y^2 + bZ^2 = -b(r+a)Z. \tag{7.24}$$

Majorons le second membre grâce à l'inégalité

$$\alpha\beta = \left(\sqrt{\epsilon}\alpha\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}}\right) \leq \frac{\epsilon\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\epsilon},$$

vraie pour tout $\epsilon \geq 0$. L'équation (7.24) devient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi|^2 + aX^2 + Y^2 + bZ^2 \leq \frac{\epsilon}{2}Z^2 + \frac{b^2}{2\epsilon}(r+a)^2.$$

Soit $l = \min((b - \frac{\epsilon}{2}), P_r)$, si on choisit $\epsilon > 0$ tel que $0 < \epsilon < 2b$ alors $l > 0$ et l'équation précédente s'écrit immédiatement

$$\frac{d}{dt}|\varphi|^2 + 2l|\varphi|^2 \leq \frac{b^2}{\epsilon}(r+a)^2. \tag{7.25}$$

Posons $V(t) = |\varphi(t)|^2$, (7.25) s'écrit

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq KV(t) + A, \tag{7.26}$$

avec $K = -2l$ et $A = \frac{b^2}{2l\epsilon}(r+a)^2$. Posons maintenant $V(t) = \Phi(t)\exp(Kt)$. De (7.26) on tire $\frac{d\Phi(t)}{dt} \leq A\exp(-Kt)$ qui, par intégration des deux membres, permet d'écrire :

$$\int_0^t \frac{d\Phi}{ds}(s)ds = \Phi(t) - \Phi(0) \leq \frac{A}{K}(1 - e^{-Kt}).$$

Or $\Phi(t) = V(t)e^{-Kt}$ et $\Phi(0) = V(0) = |\varphi(0)|^2$, on a donc

$$V(t)e^{-Kt} \leq |\varphi(0)|^2 + \frac{A}{K}(1 - e^{-Kt}),$$

ce qui entraîne, par définition des constantes K et A,

$$|\varphi(t)|^2 \leq |\varphi(0)|^2 \exp(-2lt) + \frac{b^2}{4l^2\varepsilon}(r+a)^2(1 - \exp(-2lt)). \tag{7.27}$$

Puisque $l > 0$, on en déduit que $\limsup_{t\to\infty} |\varphi(t)| \leq \rho_0$ avec $\rho_0 = \frac{b}{2l\sqrt{\varepsilon}}(r+a)$. La dynamique du système est contenue asymptotiquement dans la boule fermée $B_{\rho_0} = B(0, \rho_0)$ de $\mathbb{R}^3$. Pour t suffisamment grand, les trajectoires sont confinées dans la boule B_{ρ_0}, une telle boule est appelée une boule *absorbante*. Cette notion de boule absorbante est liée à la définition 1.4 d'un *attracteur*.

Il suit de (7.27) que si $\varphi(0) \in B_{\rho_0}$ alors $\varphi(t) \in \mathrm{Int}(B_{\rho_0})$ pour tout $t > 0$. Aussi, d'après la définition 1.4, la boule B_{ρ_0} contient l'attracteur

$$K = \cap_{t\geq 0}\varphi_t(B_{\rho_0}).$$

Pour certaines valeurs des paramètres (a, b, r), K est l'attracteur qui a été étudié expérimentalement par Lorenz et dont nous avons dit quelques mots dans l'introduction.

7.6.2. Étude des points singuliers de $X_{a,b,r}$

Nous allons tout d'abord déterminer la position des points singuliers de $X_{a,b,r}$ en fonction des paramètres. Nous devons annuler les trois composantes du champ, ce qui donne :

$$Y - X = -XY + rX - Y = XY - bZ = 0.$$

On obtient que $Y = X$, $Z = \frac{1}{b}X^2$ avec X racine de l'équation

$$X^3 - (r-1)X = 0.$$

Cette dernière équation n'a qu'une racine $X = 0$ si $r \leq 1$. Si $r > 1$ on a en plus de cette racine, deux autres racines $X = \pm S$ avec $S = \sqrt{b(r-1)}$. On en déduit que le champ $X_{a,b,r}$ a les points singuliers suivants :

- Pour tout r, on a le point singulier $O = (0, 0, 0)$. Cet équilibre est un état de non-convection où seule la *conduction* opère. Il décrit en fonction du paramètre r la branche triviale de solutions, notée **0**.

- Pour $r > 1$, on a de plus les deux points singuliers $C^{\pm} = (\pm S, \pm S, r-1)$ (notez que : $\frac{S^2}{b} = r - 1$). Ce sont des états de *convection* formant les deux branches non triviales.

Les deux branches de convection bifurquent à partir de la branche triviale en $r = 1$. Cette valeur de r apparaît donc comme le critère d'apparition de la convection.

De façon à examiner la stabilité des points singuliers, calculons la matrice jacobienne du système (7.22) en un point quelconque (X, Y, Z). Nous avons :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -Z + r & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Étude de la branche triviale 0

Pour la solution triviale $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, on vérifie immédiatement que

$$\det(J - \mu I) = \left(\mu^2 + (a+1)\mu + a(1-r)\right)(\mu + b).$$

Les valeurs propres en **0** sont les racines de ce polynôme en μ. On trouve que les trois valeurs propres sont $\mu_0 = -b < 0$, μ_+ et μ_-, ces deux dernières valeurs propres étant les racines du polynôme du second degré

$$\mu^2 + (a+1)\mu + a(1-r).$$

Comme $\mu_+\mu_- = a(1-r)$, μ_+ et μ_- ont une partie réelle négative pour $r < 1$ (elles deviennent complexes conjuguées pour $r < 1 - \frac{(a+1)^2}{4a}$). Ainsi, pour $r < 1$, les trois valeurs propres sont donc de partie réelle négative et la branche triviale est stable : le point singulier O est un puits hyperbolique.

Pour $r > 1 - \frac{(a+1)^2}{4a}$, les racines μ_+, μ_- sont réelles et égales à :

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2}(a+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 + 4a(r-1)}.$$

La valeur propre μ_- reste toujours négative alors que la valeur propre μ_+ s'annule pour $r = 1$. Le point singulier O passe par une bifurcation de type *fourche*. La branche triviale devient instable pour $r > 1$ car μ_+ devient positive. On a la naissance de deux branches de solutions stationnaires non triviales.

***Remarque* 7.7.** La bifurcation de type fourche est une variante de la bifurcation selle-nœud de codimension 1 qui a été introduite dans le chapitre 5. Cette bifurcation est définie pour les familles avec certaines symétries imposées.

Considérons pour commencer une famille de champs $X_\lambda = f_\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}$ en dimension 1 et $\lambda \in (\mathbb{R}, 0)$ (cette notation signifie que λ est choisi dans un voisinage arbitraire : on choisit une famille représentant un déploiement). La famille de fonctions $f_\lambda(x)$ est telle que pour tout λ on ait $f_\lambda(-x) = -f_\lambda(x)$. Alors f_λ est une fonction impaire que l'on peut développer en

$$f_\lambda(x) = \nu_1(\lambda)x + \nu_3(\lambda)x^3 + O(x^5).$$

On dit que X_0 a en 0 une singularité générique de codimension 1 (en tant que champ invariant par la symétrie $x \mapsto -x$) si $\nu_1(0) = 0$ et $\nu_3(0) \neq 0$. Pour un déploiement générique symétrique à 1-paramètre λ on peut supposer que $\nu_0(\lambda) \equiv \lambda$ et $\nu_3(\lambda) \equiv \pm 1$. On peut montrer qu'un tel déploiement est $\mathcal{C}^\infty$-versel et donc que tout tel déploiement générique est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent à l'un des deux modèles $X_\lambda^\pm(x) = \big(\lambda x \pm x^3\big)\frac{\partial}{\partial x}$. Un déploiement équivalent à X_λ^- est dit déploiement de *type fourche sur-critique*, et un déploiement équivalent à X_λ^+ est dit de *type fourche sous-critique,* par analogie avec les déploiements de Hopf. Dans les deux cas, l'origine est un point singulier hyperbolique, stable pour $\lambda < 0$ et instable pour $\lambda > 0$. Dans le cas sur-critique, une paire de points singulers hyperboliques stables $\pm\sqrt{\lambda}$ bifurque pour $\lambda > 0$. Dans le cas sous-critique, la paire de points singuliers existe pour $\lambda < 0$, en $\pm\sqrt{-\lambda}$. Ces points sont instables et forment le bord du bassin d'attraction de la branche stable $\mathbf{0}$, qui disparaît pour $r \geq 1$.

On peut généraliser la notion de bifurcation de type fourche en toute dimension finie. Par exemple, considérons un déploiement X_λ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (x, y, z) et que le déploiement est symétrique par la rotation π d'un demi-tour autour de l'axe Oz (cela signifie que $\pi\big(X_\lambda(m)\big) = X_\lambda\big(\pi(m)\big)$ pour tout m et tout λ). Supposons $X_0(0) = 0$ et que l'espace central E^c en ce point soit de dimension 1. On suppose de plus que E^c n'est pas tangent à l'axe Oz. Alors nécessairement E^c est perpendiculaire à l'axe $0z$, qui lui-même doit être une direction propre. On sait qu'il existe des variétés centrales W^c, de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$, arbitrairement grand), tangentes en 0 à E^c (voir le théorème 5.1). On dira que la singularité X_0 est de codimension 1 (dans l'espace des singularités invariantes par π), si la restriction $X_0|_{W^c}$ est de codimension 1 au sens déjà défini en dimension un (la définition a un sens car le champ restreint à W^c est de classe $\mathcal{C}^4$). Pour un déploiement générique X_λ avec $\lambda \in (\mathbb{R}, 0)$ on peut supposer que le déploiement $X_\lambda|_{W^c}$ est générique au sens déjà défini pour la dimension un. On obtient de cette façon des bifurcations verselles (au sens de la $\mathcal{C}^\infty$-équivalence)

avec pour modèles :

$$\pm y\frac{\partial}{\partial y} \pm z\frac{\partial}{\partial z} + (\lambda x \pm x^3)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Revenons au déploiement défini par la famille de Lorenz à l'origine de $\mathbb{R}^3$, avec les paramètres a, b fixés et donc dépendant du seul paramètre $\lambda = r - 1 \sim 0$. On écrira ce déploiement X_λ. Les valeurs propres de X_0 en 0 sont égales à $-b, -(a+1), 0$. L'espace stable E^s en 0 est donc de dimension deux et contient $0z$ (direction propre de la valeur propre μ_0) et l'espace central E^c est de dimension 1. Il est facile de vérifier que E^c est dirigé selon l'axe $0x$. Il serait plus délicat de vérifier que le déploiement est générique et nous ne le ferons pas ici. Par contre, cette généricité une fois admise, il est clair que la bifurcation est une bifurcation de fourche sur-critique car les branches non triviales $C^\pm$ sont situées du côté $r > 1$ (côté pour lequel la branche **0** devient instable). Nous allons d'ailleurs montrer ci-dessous que les valeurs propres le long des branches $C^\pm$ sont négatives pour $r > 1$, r proche de 1, ce qui confirme que la bifurcation de fourche est sur-critique.

Étude des branches non triviales $C^\pm$

Nous allons étudier la stabilité et les bifurcations le long des branches non triviales $C^\pm(r)$, ce qui revient à étudier le spectre des valeurs propres de la matrice jacobienne (7.28) associée à chacune des branches. Ces branches ainsi que la matrice jacobienne et les valeurs propres sont paramétrées par $r > 1$.

Par symétrie, les deux branches ont exactement la même nature. Il suffit donc de considérer la branche positive $C^+(r)$. La matrice jacobienne correspondante, notée $J^+(r)$, s'écrit pour toute solution de cette branche

$$J^+ = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -S(r) \\ S(r) & S(r) & -b \end{pmatrix}, \tag{7.29}$$

avec $S = S(r) = \sqrt{b(r-1)}$. Calculons les valeurs propres de $J^+(r)$, elles sont solutions de l'équation

$$P_r(\mu) = \mu^3 + (a+1+b)\mu^2 + (b + ab + (S(r))^2)\mu + 2a(S(r))^2 = 0. \tag{7.30}$$

Le polynôme caractéristique $P_r(\mu)$ (7.30) est défini pour $r \geq 1$.

Remarque 7.8. On a vu (remarque 7.4) que le modèle de Lorenz est invariant par la symétrie $(X, Y, Z) \mapsto (-X, -Y, Z)$. Dans cette symétrie, la branche $C^+(r)$ est symétrique de $C^-(r)$. L'étude de la stabilité de la branche C^- est donc identique

à celle de la branche $C^+(r)$. Cela se traduit par le fait que le polynôme (7.30) nécessaire à l'examen de la stabilité de ces branches, dépend de $(S(r))^2$ et non pas de $\pm S(r)$.

Le polynôme P_r possède toujours une racine réelle négative $\mu_1(r)$ car $P_r(\mu) \to -\infty$ si $\mu \to -\infty$ et que $P_r(0) = 2aS^2 > 0$. Comme ce polynôme est du troisième degré, il existe deux possibilités pour les trois racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité :

i) les trois racines μ_1, μ_2 et μ_3 sont réelles (avec éventuellement $\mu_2 = \mu_3$),

ii) une racine μ_1 est réelle, les deux autres racines μ_2 et $\mu_3 = \overline{\mu_2}$ sont complexes conjuguées (car les coefficients de l'équation sont réels) avec $\mu_2 = \alpha + i\beta$.

Le polynôme P_r peut s'écrire $P_r(\mu) = \mu^3 - \Sigma_1\mu^2 + \Sigma_2\mu - \Sigma_3$, où

$$\Sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,\ \Sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 \ \text{ et } \ \Sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$$

sont les fonctions symétriques des racines. Voici une identité remarquable qui va nous être utile par la suite :

Lemme 7.1. *On a l'identité :*

$$(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1) \equiv \Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_3. \tag{7.31}$$

Démonstration. On peut vérifier cette identité par un calcul direct. Une façon plus facile est d'utiliser un résultat de Newton : *toute expression polynomiale symétrique dans les racines s'exprime polynomialement par rapport à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Cela implique qu'il existe des constantes α, β, γ telles que :

$$(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1) \equiv \alpha\Sigma_1^3 + \beta\Sigma_1\Sigma_2 + \gamma\Sigma_3.$$

On évalue les constantes en donnant des valeurs particulières à μ_1, μ_2, μ_3. Par exemple, en prenant $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\mu_3 = 1$, on obtient $\alpha = 0$. En prenant $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, on obtient $9\beta + \gamma = 8$. Enfin, en prenant $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1, \mu_3 = 1$, on obtient $\beta + \gamma = 0$. On tire de ces deux dernières relations que $\beta = 1$ et $\gamma = -1$, ce qui donne l'identité (7.31). ∎

Pour le polynôme P_r, on a explicitement :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = -(a + b + 1) \\ \Sigma_2 = \quad (a + r)b \\ \Sigma_3 = -2ab(r - 1) \end{cases}. \tag{7.32}$$

Les racines sont simples en dehors du discriminant Δ du polynôme P_r, qui est l'ensemble des valeurs de r pour lequel P_r a une racine multiple. Ce discriminant est donné par une équation $\{\Delta(r) = 0\}$ qui est polynomiale en r, de degré ≤ 3. Δ est donc un ensemble fini de $]1, +\infty)$ contenant au plus 3 points (la valeur 1 est clairement en dehors de Δ).

En dehors de Δ, on a trois racines simples dans $\mathbb{C}$. Par application du théorème des fonctions implicites, ces racines dépendent de façon $\mathcal{C}^\infty$ de $r \in]1, +\infty) \setminus \Delta$. Comme le produit des trois racines est égal à $-2ab(r-1) < 0$, il existe toujours une racine réelle strictement négative pour $r > 1$. Soit $\mu_1(r)$ la plus petite de telles racines réelles négatives (comptée sans multiplicité !). La fonction $\mu_1 : r \mapsto \mu_1(r)$ est définie sur $[1, +\infty)$ et est continue (aux points de Δ, la fonction μ_1 peut perdre sa différentiabilité, mais pas sa continuité). Les deux autres racines μ_2, μ_3 sont réelles sur l'ensemble $\{\Delta(r) \geq 0\}$, ou complexes (non réelles) conjuguées sur l'ensemble $\{\Delta(r) < 0\}$. On peut distinguer ces deux racines en disant que $\mu_2 \leq \mu_3$ quand les racines sont réelles et que $\mathrm{Im}(\mu_2) \leq \mathrm{Im}(\mu_3)$ dans le cas contraire ($\mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire du nombre complexe z). On obtient de cette façon deux fonctions $\mu_2 : r \mapsto \mu_2(r)$ et $\mu_3 : x \mapsto \mu_3(r)$ définies et continues sur $[0, +\infty)$.

Nous avons introduit les bifurcations de Hopf-Takens en toute codimension dans le chapitre 5. Le cas de codimension 1 est simplement appelé bifurcation de Hopf. Nous allons chercher s'il existe des valeurs r_0 pour lesquelles le déploiement à 1-paramètre défini par $X_r = X_{a,b,r}$ au point $C^+(r_0)$ et pour $r \sim r_0$, est une bifurcation de Hopf. Rappelons (paragraphe 5.7) la caractérisation d'une bifurcation de Hopf pour un tel déploiement $(X_r, (C^+(r_0), r_0))$ en dimension s3 :

Définition 7.1. Le déploiement $(X_r, (C^+(r_0), r_0))$ est une bifurcation de Hopf si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

1. Le spectre des valeurs propres en $C^+(r)$ pour $r \sim r_0$ est égal à :

   $\mu_1(r),\ \mu_2(r) = \alpha(r) + i\beta(r),\ \overline{\mu_2}(r),$ avec $\mu_1(r_0) \neq 0, \alpha(r_0) = 0, \beta(r_0) \neq 0.$

   Pour la famille X_r on a : $\mu_1(r_0) < 0$.

2. $\alpha'(r_0) \neq 0$.

3. En coordonnées polaires (θ, ρ), le 3-jet de X_0 en $C^+(r_0)$ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalent au champ polynomial $\frac{\partial}{\partial\theta} + b\rho^3 \frac{\partial}{\partial\rho}$ avec $b \neq 0$.

Pour avoir la condition 1 de la définition 7.1, il faut trouver une valeur r_0 du paramètre r, si elle existe, pour laquelle le polynôme caractéristique P_r a une paire de racines imaginaires conjuguées. Désignons par $H \subset]1, +\infty)$ l'ensemble

de telles valeurs r_0. L'identité (7.31) implique qu'une condition nécessaire est :

$$\Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma_3. \tag{7.33}$$

Remarquez que (7.33) n'est pas en général une condition suffisante pour que l'on ait une paire de racines imaginaires conjuguées. En effet l'identité (7.31) implique que (7.33) est seulement équivalente à la propriété selon laquelle deux des racines sont opposées, et ces racines opposées peuvent être réelles.

En utilisant les expressions (7.32) et la condition (7.33), on obtient pour r_0 la *condition nécessaire* suivante :

$$(a+b+1)(a+r_0) = 2a(r_0-1), \tag{7.34}$$

soit

$$r_0 = \frac{a(a+b+3)}{a-b-1}. \tag{7.35}$$

Si $a \leq b+1$, il n'y a aucune valeur positive du paramètre $r > 1$ satisfaisant à (7.35). Nous supposerons donc que $a > b+1$.

Nous avons montré que l'ensemble H contient *au plus* le point r_0. Pour le polynôme particulier P_r, on peut prouver la réciproque :

Proposition 7.1. *$H = \{r_0\}$, autrement dit les valeurs propres $\mu_2(r_0)$ et $\mu_3(r_0)$ sont imaginaires conjuguées et r_0 est l'unique valeur de $r \in [1, +\infty)$ avec cette propriété. Pour $1 < r < r_0$, les trois racines ont une partie réelle strictement négative.*

Démonstration. Pour $r = 1$, les racines de P_r sont $0, -b, -(a+1)$. Donc, pour $r > 1$ et assez proche de 1, on aura, par continuité, deux racines strictement négatives. Comme le produit des trois racines égal à $-2ab(r-1)$ est strictement négatif pour $r > 1$, la troisième racine est aussi strictement négative, proche de 0. Donc pour $r > 1$ et proche de 1, on a trois racines réelles strictement négatives : $\mu_1(r) < \mu_2(r) < \mu_3(r) < 0$. Maintenant, lorsque r augmente, il n'y a que deux possibilités pour qu'une des racines ait une partie réelle nulle : ou bien une des racines s'annule, ou bien $r \in H$. Le premier cas est impossible puisque le produit des trois racines reste strictement négatif pour $r > 1$. Le second cas implique que $r = r_0$. Nous venons donc de prouver la seconde affirmation de la proposition, à savoir que pour $1 < r < r_0$, les trois racines ont une partie réelle strictement négative.

Comme r_0 est définie par la condition (7.33), deux des racines sont opposées pour cette valeur r_0, ou bien réelles et de signe opposé, ou bien imaginaires conjuguées. Si ces valeurs étaient réelles, l'une d'entre elles serait strictement positive,

car deux racines sont de signe opposé, ce qui est impossible, puisque par continuité les trois racines sont de partie réelle inférieure à 0 en r_0. Nous avons donc nécessairement $\mu_1(r_0) < 1$. Il en résulte aussi que l'on a une paire de racines imaginaires conjuguées en r_0 (nécessairement les racines $\mu_2(r_0)$ et $\mu_3(r_0)$) et donc que $H = \{r_0\}$. Ce qui est la première affirmation. ■

Nous venons de vérifier au point $C^+(r_0)$ la condition 1 de la définition 7.1 pour le champ X_{r_0}. Nous allons maintenant vérifier pour le déploiement lui-même, la condition 2 de la même définition (cette condition traduit la transversalité à la singularité de Hopf dans l'espace des 3-jets ; voir chapitre 5). On vient de voir que si $\mu_2(r) = \alpha(r) + i\beta(r)$, alors $\alpha(r_0) = 0$ et $\beta(r_0) \neq 0$. Montrons que la fonction α a une racine simple en r_0 :

Proposition 7.2. *Avec la notation $\mu_2(r) = \alpha(r) + i\beta(r)$, on a :*

$$\alpha'(r_0) > 0, \quad \text{si} \quad a > b + 1. \tag{7.36}$$

Démonstration. D'après (7.32), on a $\Sigma_1 = 2\alpha(r) + \mu_1(r) = -(a + b + 1)$, $\Sigma_2 = |\mu_2(r)|^2 + 2\alpha(r)\mu_1(r) = (a + r)b$ et $\Sigma_3 = |\mu_2(r)|^2\mu_1(r) = -2ab(r - 1)$. L'équation en Σ_1 donne immédiatement

$$\mu_1(r) = -(a + b + 1 + 2\alpha(r)). \tag{7.37}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation en Σ_2 par $\mu_1(r)$ et en tenant compte de l'équation en Σ_3, il vient :

$$(a + r)b\mu_1(r) = 2\mu_1^2(r)\alpha(r) - 2ab(r - 1). \tag{7.38}$$

Enfin, on porte dans (7.38) la valeur de $\mu_1(r)$ fournie par (7.37), on a :

$$-(a + b + 1 + 2\alpha(r))(a + r)b = -2ab(r - 1) + 2\alpha(r)(a + b + 1 + 2\alpha(r))^2. \tag{7.39}$$

Différentions (7.39) par rapport à r. On a :

$$-2\alpha'(r)(a + r)b - (a + b + 1 + 2\alpha(r))b = \dots$$
$$\dots = -2ab + 2\alpha'(r)(a + b + 1 + 2\alpha(r))^2 + 8\alpha(r)(a + b + 1 + 2\alpha(r))\alpha'(r).$$

Pour $r = r_0$, on sait que $\alpha(r_0) = 0$, alors :

$$-2\alpha'(r_0)(a + r_0)b - (b + 1 - a)b = 2\alpha'(r_0)(a + b + 1)^2,$$

soit finalement

$$\alpha'(r_0) = \frac{(a - b - 1)b}{2[b(r_0 + a) + (a + b + 1)^2]}.$$

Lorsque $a > b + 1$, on vérifie trivialement que $\alpha'(r_0) > 0$. ■

Récapitulons. Les paramètres a, b étant fixés avec $a > b + 1$, le déploiement $X_r = X_{a,b,r}$ au point $C^+(r_0)$, avec $r \sim r_0$, a pour spectre de valeurs propres $\mu_1(r), \alpha(r) \pm i\beta(r)$ avec $\mu_1(r_0) < 0$, $\alpha(r_0) = 0, \beta(r_0) \neq 0$ et $\alpha'(r_0) > 0$. On a donc réduction de la famille à une variété centrale de dimension 2 (normalement attractante) sur laquelle le germe X_r vérifie les deux premières conditions de la définition 7.1, portant sur sa partie linéaire.

On peut dire que ce déploiement $(X_r, (C^+(r_0), r_0))$ est une *bifurcation de Hopf à l'ordre* 1. En fait, sous ces deux premières conditions seulement, on sait qu'il existe une surface d'orbites périodiques et passant par le point $(C^+(r_0), r_0)$. Cette surface est contenue dans l'espace de dimension trois, produit de la variété centrale par la direction du paramètre r. Sous les seules conditions 1 et 2 de la définition 7.1, la position de cette surface est indéterminée. Pour déterminer cette position, il faut vérifier la troisième condition de la définition 7.1, portant sur la singularité X_{r_0} : à savoir que la partie radiale de la forme normale est non linéaire à l'ordre 3. Cette vérification peut être faite pour le déploiement $(X_r, (C^+(r_0), r_0))$, mais elle est assez compliquée. On en parlera dans le prochain paragraphe. C'est le signe de cette partie radiale d'ordre 3 qui permettra de déterminer si la bifurcation de Hopf est sur-critique ou bien sous-critique.

Remarque 7.9. La condition $\alpha'(r_0) > 0$ entraîne que $\alpha(r)$ croît strictement avec r au voisinage de r_0. Comme $\alpha(r_0) = 0$, cela a pour conséquence que la partie réelle $\alpha(r)$ de $\mu_2(r)$ est négative pour $r < r_0$ suffisamment proche de r_0, ce que nous savions déjà par la proposition 7.1. Pour $r > r_0$ suffisamment proche de r_0, $\mu_2(r)$ et donc aussi $\mu_3(r)$ ont une partie réelle strictement positive. Cette propriété persiste pour tous les $r > r_0$ par un argument complètement similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 7.1 pour les racines $\mu_i(r)$ sur l'intervalle $]1, r_0[$. En effet, si par exemple la partie réelle de $\mu_2(r)$ s'annule en $r_1 > r_0$, on a nécessairement que $r_1 \in H$ car $\mu_2(r_1) \neq 0$. Mais cela serait en contradiction avec le fait que $H = \{r_0\}$.

Remarquons que nous avons étudié complètement la stabilité de la solution stationnaire non triviale $C^+(r)$ pour tout $r > 1$. Dans la proposition 7.1, nous avons montré que les trois valeurs propres sont de partie réelle strictement négative pour $0 < r < r_0$. En conséquence, le point $C^+(r)$ est un puits hyperbolique pour $0 < r < r_0$. Dans la remarque 7.9, nous avons montré que les valeurs propres $\mu_2(r)$ et $\mu_3(r)$ ont une partie réelle positive si $r > r_0$. Le point $C^+(r)$ devient donc un point de selle avec une direction stable de dimension 1, pour $r > r_0$.

On a vu au début de la preuve de la proposition 7.1 que les trois racines sont réelles négatives pour $r > 1$ assez proche de 1. Ceci n'est pas vrai pour tout r tel que $1 < r < r_0$. En effet, au voisinage de r_0 les deux racines

$\mu_2(r) = \alpha(r) + i\beta(r), \mu_3(r) = \overline{\mu_2}(r)$ sont complexes conjuguées avec $\alpha(r) < 0$ et $\beta(r) \neq 0$, pour $r < r_0$ suffisamment proche de r_0. Cela implique qu'il existe une valeur $r^* \in \Delta$ (le discriminant de la famille P_r), avec $1 < r^* < r_0$ et telle que les trois valeurs propres soient réelles et négatives pour $1 < r \leq r^*$. En r^* on aura $\mu_1(r^*) < \mu_2(r^*) = \mu_3(r^*) < 0$. Comme les points de Δ sont isolés, on aura pour $r > r^*$, proche de r^*, une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Pour $a = P_r = 10$ et $b = 8/3$, Sparrow [65] indique que $r^* = 1{,}346$. Cette valeur est calculée numériquement.

Remarque 7.10. Ceci démontre aussi, comme nous l'avons déjà noté, que la seconde branche C^- des états stationnaires est stable pour $1 < r < r_0$ et qu'elle est instable pour $r > r_0$. Au total, les trois branches d'états stationnaires sont instables pour $r > r_0$ (figure 7.2).

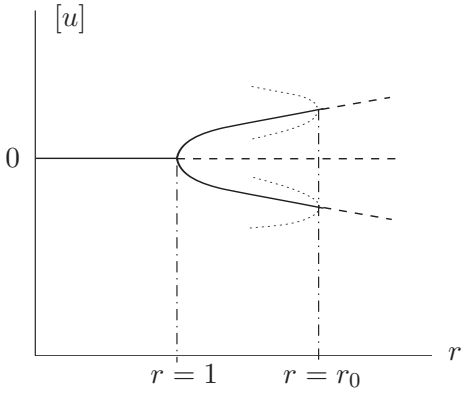


Figure 7.2. Les lignes en pointillés indiquent les cycles limites instables, les lignes en tirets les solutions stationnaires instables.

D'où la conclusion : l'instabilité des branches stationnaires non triviales ne peut exister que si a et b sont tels que $r_0 > 1$. Ces branches sont stables si et seulement si

(a) $a < b + 1$ et $r > 1$, (r_0 n'existe pas)

ou

(b) $a > b + 1$ et $1 < r < r_0$.

Par conséquent, étant donné l'instabilité de la branche stationnaire nulle, pour $1 < r < r_0$ la variété instable de la solution nulle (qui est de dimension 1) s'enroule autour de $C^+(r)$ et $C^-(r)$.

Remarque 7.11. Pour $P_r = 10$ et $b = 8/3$, la valeur critique du paramètre r pour laquelle la convection stationnaire devient instable (le point de bifurcation de Hopf) est $r_0 = \frac{470}{19} = 24{,}74$.

Remarque 7.12. Au point de bifurcation de Hopf, les valeurs propres complexes sont $\mu_2 = i\beta(r_0)$ et $\mu_3 = -i\beta(r_0)$ avec $\beta(r_0) \neq 0$. En coordonnées polaires (ρ, θ), le champ X_{r_0} s'écrit donc $\beta(r_0)\frac{\partial}{\partial\theta}$ et la période initiale de la solution périodique est égale à $\frac{2\pi}{\beta(r_0)}$.

Comme nous l'avons dit plus haut, il existe un point de bifurcation de Hopf à l'ordre 1 sur chacune des branches stationnaires non triviales pour la valeur r_0 du paramètre. Ce qui précède ne dit pas si nous avons réellement une bifurcation de Hopf au sens rappelé dans la définition 7.1 car nous n'avons pas vérifié la condition 3 de cette définition : la bifurcation est-elle sur- ou sous-critique ? C'est la question de la stabilité des solutions périodiques qui naissent au point de bifurcation.

7.6.3. Sous-criticité de la bifurcation de Hopf et comportement du modèle pour $r > r_0$

Que se passe-t-il au point de bifurcation de Hopf, pour r légèrement plus grand que r_0 ? On peut supposer que chaque solution des branches stationnaires non triviales C^+ et C^- serait encerclée d'un cycle limite stable (ce serait le cas si la bifurcation de Hopf était sur-critique). Mais c'est inexact car, numériquement, il s'avère qu'avec les valeurs choisies par Lorenz, on ne constate aucun cycle limite stable ou instable pour r légèrement plus grand que r_0.

Mais alors, où sont les orbites périodiques qui, avec les valeurs choisies par Lorenz, existent même pour une bifurcation de Hopf à l'ordre 1 ? Elles doivent naître pour des valeurs r telles que $1 < r < r_0$. Lorenz a conjecturé, grâce à ses calculs, que la bifurcation de Hopf est sous-critique (voir le chapitre 5 pour la définition). Le portrait de phase est exhibé dans la partie gauche de la figure 7.4. Cependant ceci n'est pas toujours vrai et dépend des valeurs de $a = P_r$ et de b. On peut trouver la preuve, exigeant un calcul difficile, que la condition 3 de la définition 7.1 est vérifiée et donc décider de la stabilité ou de l'instabilité des orbites périodiques en fonction de (a, b), dans Marsden, Mac Cracken [44]. Pour les valeurs $a = 10$ et $b = 8/3$ choisies par Lorenz et pour lesquelles les résultats suivants sont présentés, la bifurcation est effectivement sous-critique avec $r_0 = 24{,}74$.

Pour $r > r_0$ les trajectoires peuvent éventuellement évoluer vers un attracteur éloigné. Mais que peut-il être ? Un diagramme partiel de bifurcation, basé sur les résultats ci-dessus mentionnés, montre qu'il n'y a pas d'attracteur trivial (point fixe ou cycle limite) stable dans un voisinage de r_0, pour $r > r_0$ (figure 7.2).

Remarque 7.13. La notation $[u]$ de la figure 7.2 désigne une mesure scalaire de la solution $u = (X, Y, Z)^T$ qui n'est pas nécessairement une norme. Cette notation est utile à la compréhension de tout diagramme de bifurcation. Le choix de $[u]$ est crucial à la bonne lecture des phénomènes, mais il n'y a pas de choix idéal les illustrant tous. Il faut cependant, en pratique, s'efforcer de choisir un $[u]$ qui mette en évidence certaines propriétés des solutions et qui « dissymétrise » les solutions possibles.

Se pourrait-il cependant qu'il existe un cycle limite stable que nous ignorions ? *A priori* peut-être, mais Lorenz [40] donne un argument heuristique et astucieux, appuyé sur des résultats numériques, précisant que, pour $r > r_0$ et légèrement plus grand que r_0, tout cycle limite serait instable. Lorenz a choisi la valeur $r = 28$ pour ses expériences numériques. Cet argument consiste d'abord à intégrer le système sur une longue durée et à repérer sur la courbe $t \mapsto z(t)$ (en choisissant la variable z comme diagnostic) les maxima locaux successifs $\ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots$.

Lorenz définit une fonction f (dite *application de Lorenz*) par $z_{n+1} = f(z_n)$. Si on construit le graphe de cette fonction, on constate visuellement sur la figure 7.3 (voir [40] figure 4 pour plus de précisions) que $|f'(z)| > 1$ et que la première bissectrice coupe la courbe $f(z)$ en un point z^* unique tel que $f(z^*) = z^*$, l'application f a donc un point fixe.

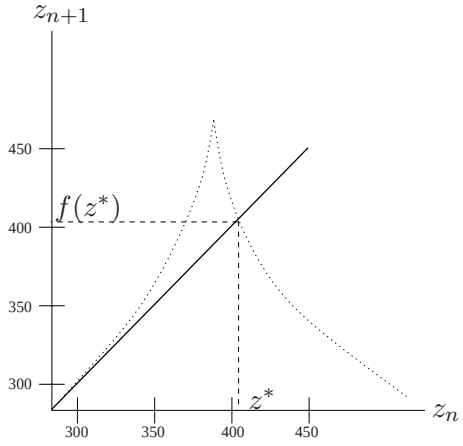


Figure 7.3. La ligne en pointillés indique la courbe « stylisée » (un cusp) $z \mapsto f(z)$, la ligne en trait plein désigne la première bissectrice. La courbe est obtenue pour les valeurs standard P_r et b de Lorenz. Pour b/P_r très petit la courbe est composée de multiples cusps très étroits ([65], chapitre 8, page 174), la discussion est alors plus complexe.

Notons qu'à proprement parlé $z_{n+1} = f(z_n)$ n'est pas l'algorithme de Picard bien qu'en présentant la forme, car à la fois z_n et z_{n+1} sont des données. Attention, cela ne veut donc pas dire que l'on construit la suite des z_n, par le processus itératif $z_{n+1} = f(z_n)$, en espérant qu'elle converge vers z^* (z_n peut être très proche de z^* et z_{n+1} en être très éloigné), la convergence est d'ailleurs impossible car $|f'(z)| > 1$, pour tout z. La suite des (z_n) peut être très compliquée. Cependant, on peut se poser la question de la stabilité de z^* ou, de façon équivalente, de l'orbite fermée associée à z^*.

Supposons qu'il existe un cycle limite, c'est-à-dire une solution périodique isolée ; on a alors $z_l = z_{l+1} = z_{l+2} = \ldots = z^*$ pour un certain indice l (les maxima sont les mêmes d'une période à l'autre). L'application f a donc un point fixe z^* dont on connaît par ailleurs graphiquement l'existence. Considérons une trajectoire légèrement perturbée de la trajectoire associée à z^*, telle que $z_n = z^* + \eta_n$ où η_n est petit. Après l'habituelle linéarisation, on a $\eta_{n+1} = f'(z^*)\eta_n$. Puisque $|f'(z)| > 1$, il vient $|\eta_{n+1}| > |\eta_n|$. La déviation $|\eta_n|$ augmente à chaque itération, la solution périodique (i.e. l'orbite fermée) est instable.

Remarque 7.14. Insistons sur le fait que ce résultat d'instabilité est vrai pour $r > r_0$ légèrement plus grand que r_0 (ici $r = 28$). Des expériences numériques indiquent que le système a un cycle limite globalement attractif pour tout $r > 313$ ([65] chapitre 7).

Grâce à ce qui précède, on peut donner une description qualitative de la dynamique.

Comme il n'y a pas de point fixe ou de cycle limite stable pour $r > r_0$ et voisin de r_0, cela veut-il dire que les trajectoires sont rejetées à l'infini lorsque $t \to \infty$? Non, car on a vu au début du paragraphe 7.6.1 que les trajectoires restent confinées dans une boule. De plus, dès que $r > r_0$, on a vu qu'en chaque point $C^+(r)$ (resp. $C^-(r)$), le système linéarisé a deux valeurs propres à parties réelles positives auxquelles on associe une variété invariante instable $W^u_+(r)$ (resp. $W^u_-(r)$) de dimension 2 et une valeur propre réelle négative à laquelle on associe une variété invariante stable $W^s_+(r)$ (resp. $W^s_-(r)$) de dimension 1 (voir chapitre 3 pour la définition de variété invariante). Si les valeurs propres de partie réelle positive sont complexes conjuguées (ce qui est le cas pour r proche de r_0), il en résulte que les orbites avoisinantes tournent en faisant une spirale et en s'écartant du point fixe $C^+(r)$ (resp. $C^-(r)$) dans la direction de $W^u_+(r)$ (resp. de $W^u_-(r)$) ; dans le même temps, ces orbites s'approchent du point fixe dans la direction de la variété stable $W^s_+(r)$ (resp. de $W^s_-(r)$) (partie droite de la figure 7.4).

Ainsi les trajectoires ont un comportement non trivial à long terme. Pour les valeurs du paramètre pour lesquelles le mécanisme de création de l'attracteur de

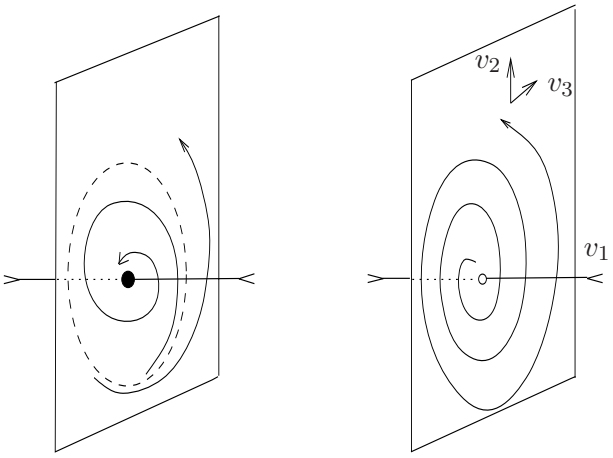


Figure 7.4. La ligne en pointillés indique le cycle limite instable. La figure de gauche (resp. droite) est associée à $r < r_0$ (resp. $r > r_0$).

Lorenz est actif, la trajectoire $\varphi(t)$ va vers C^+ suivant sa variété stable, puis tourne en spirale et en s'éloignant selon sa variété instable et va ensuite vers C^- suivant la variété stable de C^-, etc. Les trajectoires sont rejetées d'un objet instable à un autre, alors qu'elles sont confinées dans un ensemble borné de volume nul. Le nombre de circuits faits dans chaque variété instable varie de façon imprévisible d'un cycle à l'autre. La séquence du nombre de circuits a beaucoup de caractéristiques d'une suite aléatoire. Lorsque la trajectoire est vue en trois dimensions, on voit qu'elle tend vers un ensemble extrêmement fin qui ressemble à une paire « d'ailes de papillon » (figure 1.5) ; cet ensemble, qui est précisement l'*attracteur de Lorenz* pour des valeurs convenables des paramètres, est un *attracteur étrange* selon la terminologie imaginée par Ruelle et Takens en 1971. Un attracteur étrange est un attracteur non hyperbolique qui montre de la *sensibilité aux conditions initiales*, c'est-à-dire que deux trajectoires associées à deux conditions initiales voisines divergent rapidement l'une de l'autre sur l'attracteur avec des futurs totalement différents l'un de l'autre (définition 1.4). La sensibilité par rapport aux conditions initiales est en général la conséquence de la positivité du plus grand *exposant de Lyapounov*. Cet exposant peut être déterminé par des méthodes numériques (voir, par exemple, [5] annexe B pour une introduction de cette notion). Plus précisément, on prouve que l'écart $\delta u(t)$ entre deux trajectoires, considérées aux mêmes instants t, issues de conditions intitiales séparées initialement par l'écart $\delta u(0)$, se comporte comme $\|\delta u(t)\| \approx \|\delta u(0)\| e^{\lambda t}$ où $\lambda = 0{,}9$ est le plus grand exposant de Lyapounov calculé essentiellement par des méthodes numériques. Cette divergence exponentielle au voisinage de l'attracteur

implique évidemment la propriété de dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales.

Une autre propriété remarquable de l'attracteur de Lorenz est qu'il a une dimension *fractale*, c'est-à-dire non entière, comprise strictement entre 1 (la dimension des variétés stables des points $C^{\pm}(r)$) et 3. Nous ne définirons pas ici la dimension en question, qui est la dimension de Hausdorff (voir [42]). On peut déterminer la dimension d'un ensemble fractal. Des expériences numériques indiquent que la dimension de l'attracteur étrange de Lorenz (figure 1.5) est de l'ordre de $2{,}05 \pm 0{,}01$.

Nous allons nous contenter de prouver une propriété plus faible sur la mesure de Lebesgue de cet attracteur. 0n note mes(V) la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble mesurable V de R^n ; rappelons que dans le cas d'un *domaine* V, c'est-à-dire d'une sous-variété de dimension n compacte de $\mathbb{R}^n$ bordée par une sous-variété de dimension $n-1$ (par exemple une boule de $\mathbb{R}^n$), la mesure de Lebesgue de V est égale au volume usuel que l'on notera aussi vol(V).

Proposition 7.3. *Si K est un attracteur pour un champ de Lorenz $X_{a,b,r}$ (avec $a, b \neq 0$), alors* mes$(K) = 0$.

En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il suit trivialement de la proposition 7.3 que la dimension de tout attracteur K dans le système de Lorenz est de dimension (de Hausdorff) strictement inférieure à 3. Nous allons en fait établir une propriété plus forte pour le champ $X_{a,b,r}$ (avec $a, b \neq 0$), à savoir qu'un tel champ est *dissipatif*. Cela signifie que son flot contracte le volume au sens suivant :

Définition 7.2. Soit X un champ de vecteurs sur R^n. On désigne par $\varphi(t, m)$ le flot de X que l'on suppose complet. Si V est un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, désignons par $V_t = \varphi(t, V)$ le domaine obtenu par transport de V le long du flot, jusqu'à l'instant t (on part de $V_0 = V$). On dit que le champ X est *dissipatif* si, pour tout domaine V, on a vol$(V_t) \to 0$ en décroissant pour $t \to +\infty$. Si au contraire le volume de V_t reste constant pour tout temps t et tout domaine V, on dit que X est *conservatif*.

Pour démontrer la proposition 7.3, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires. Tout d'abord le lemme suivant sur les déterminants :

Lemme 7.2. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée réelle de dimension n quelconque. Alors*

$$\det(Id + tA) = 1 + \mathrm{trace}(A)t + O(t^2), \tag{7.40}$$

où trace(A) *désigne la* trace *de A égale à $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Démonstration. On a

$$\det(Id + tA) = \Pi_{i=1}^{n}(1 + a_{ii}t) + \Psi(A, t),$$

où Ψ désigne une somme de monômes $\Pi_{i=1}^{n} b_{ik_i}$ sur les coefficients b_{ij} de la matrice $Id + tA$, chacun de ces monômes contenant au moins *deux* b_{ik_i} *non diagonaux*. Il s'ensuit que $\Psi(A, t)$ est multiple de t^2 et donc

$$\det(Id + tA) = \Pi_{i=1}^{n}(1 + a_{ii}t) + O(t^2). \tag{7.41}$$

D'autre part, il est clair que

$$\Pi_{i=1}^{n}(1 + a_{ii}t) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) t + O(t^2). \tag{7.42}$$

La formule (7.40) suit de (7.41) et (7.42). ■

Rappelons que si $X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ est un champ différentiable de $\mathbb{R}^n$, on appelle *divergence* de X la fonction $\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$. Remarquez que $\mathrm{div}X = \mathrm{trace}(JX)$, où $JX(x)$ est la matrice jacobienne $JX(x) = (\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x))$.

Le résultat suivant montre que la divergence donne la variation infinitésimale du volume local par l'action du flot :

Proposition 7.4. *Soit X un champ de vecteurs sur R^n de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Comme dans la définition 7.2 on désigne par $\varphi(t, m) = \varphi_t(m)$ le flot de X que l'on suppose complet. Soit V un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $V_t = \varphi_t(V)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{vol}(V_t)](t) = \int_{V_t} \mathrm{div}X \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{7.43}$$

Démonstration. Rappelons la formule de changement de coordonnées dans une intégrale (voir [13]) : *si G est un difféomorphisme d'un domaine V de $\mathbb{R}^n$ sur le domaine image $G(V)$, soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors :*

$$\int_{G(V)} f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_V \det(JG)(x) f \circ G(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

En particulier, en prenant la fonction $f \equiv 1$, on obtient :

$$\mathrm{vol}(G(V)) = \int_V \det(JG)(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{7.44}$$

Considérons maintenant un champ X sur $\mathbb{R}^n$, à flot complet que l'on notera $\varphi_t(x)$. Rappelons que $x \mapsto \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme pour tout t. Ce difféomorphisme se développe à l'ordre 1 en t :

$$\varphi_t(x) = x + tX(x) + O(t^2).$$

En prenant la différentielle par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$J\varphi_t(x) = Id + tJX(x) + O(t^2).$$

Appliquons maintenant la formule (7.44) à $G = \varphi_t$. On obtient :

$$\text{vol}(V_t) = \int_V \det(J\varphi_t(x))dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{7.45}$$

Par le lemme 7.2 on a

$$\det(J\varphi_t(x)) = \det(Id + tJX(x) + O(t^2)) = 1 + t\text{div}X(x) + O(t^2),$$

car, comme on l'a signalé plus haut : $\text{div}X(x) = \text{trace}(JX(x))$. En reportant ce développement de $\det(J\varphi_t(x))$ dans (7.45), on a

$$\text{vol}(V_t) = \text{vol}(V) + t\int_V \text{div}X(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + O(t^2),$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}[\text{vol}\big(\varphi_t(V)\big)]|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\text{vol}(V_t)](0) = \int_V \text{div}X\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{7.46}$$

qui est la formule (7.43) pour $t = 0$. Soit maintenant une valeur quelconque de t. De la formule de composition $\varphi_{t+\tau} = \varphi_\tau \circ \varphi_t$, on tire :

$$\frac{d}{dt}[\text{vol}(V_t)](t) = \frac{d}{d\tau}[\text{vol}(V_{t+\tau})]|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}[\text{vol}(\varphi_\tau(V_t))]|_{\tau=0}.$$

En appliquant (7.46) à V_t en place de V et à φ_τ en place de φ_t, on obtient que :

$$\frac{d}{d\tau}[\text{vol}\big(\varphi_\tau(V_t)\big)]|_{\tau=0} = \int_{V_t} \text{div}X\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

et donc finalement $\frac{d}{dt}[\text{vol}(V_t)](t) = \int_{V_t} \text{div}X\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, qui est la formule (7.43) souhaitée. ■

Pour le champ $X_{a,b,r}$ du système de Lorenz (7.22), nous avons

$$\mathrm{div}(X_{a,b,r}) = \frac{\partial}{\partial X}(aY - aX) + \frac{\partial}{\partial Y}(-XZ + rX - Y) + \frac{\partial}{\partial Z}(XY - bZ),$$

soit

$$\mathrm{div}(X_{a,b,r}) = -(a + 1 + b) < 0. \tag{7.47}$$

Soit V un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$. Puisque la divergence est constante et égale à $-(a+1+b) < 0$, on a $\int_{V_t} \mathrm{div}(X) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = -(a+1+b)\mathrm{vol}(V_t)$, et la formule (7.43) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{vol}(V_t)](t) = -(a + 1 + b)\mathrm{vol}(V_t).$$

Cette équation s'intègre en : $\mathrm{vol}(V_t) = \mathrm{vol}(V)e^{-(a+1+b)t}$. Le volume du domaine transporté V_t décroît donc exponentiellement en t vers 0, lorsque $t \to +\infty$. Le champ de Lorenz $X_{a,b,r}$ est donc dissipatif en un sens fort. Pour un tel champ, on a le résultat suivant :

Lemme 7.3. *Soit X un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, tel que $\mathrm{div}X < -M$, pour un certain $M > 0$. Alors tout attracteur de X est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Rappelons que, d'après la définition 1.4, le sous-ensemble invariant compact $K \subset \mathbb{R}^n$ est un attracteur pour le flot $\varphi_t(x)$ de X, s'il existe un voisinage compact U de K tel que si $T > 0$ est assez grand on ait $\varphi_T(U) \subset \mathrm{Int}(U)$ et que $\cap_{t\geq 0}\varphi_t(U) = K$. On dira que U est un *voisinage de confinement* pour K.

Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que U est un domaine. En effet, si on considère les ε-voisinages de K : $U_\varepsilon = \{x \,|\mathrm{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$, il suit du théorème de Sard (chapitre I-2) que, pour presque tous les ε, le bord de U_ε est une sous-variété de dimension $n-1$. D'autre part, si ε est assez petit, on a $U_\varepsilon \subset U$ et il est clair que l'on peut remplacer U par n'importe quel sous-voisinage compact.

Pour un domaine U qui est un voisinage de confinement de K, on peut répéter le calcul d'intégration fait plus haut pour le champ $X_{a,b,r}$: si $U_t = \varphi_t(U)$, alors $\mathrm{vol}(U_t) \leq \mathrm{vol}(U)e^{-Mt}$. Comme $K \subset U_t$ pour tout $t \geq 0$, on en déduit que $\mathrm{mes}(K) \leq \mathrm{vol}(U)e^{-Mt}$ pour tout $t \geq 0$, et donc que $\mathrm{mes}(K) = 0$. ∎

Ainsi s'achève la démonstration de la proposition 7.3.

La contraction des volumes impose des restrictions sévères sur les attracteurs possibles dans les équations de Lorenz. Par exemple, il ne peut pas y avoir de solutions quasi périodiques. Si elles existaient, elles vivraient sur un tore T qui serait invariant sous le flot ; mais alors le domaine compact bordé par T serait

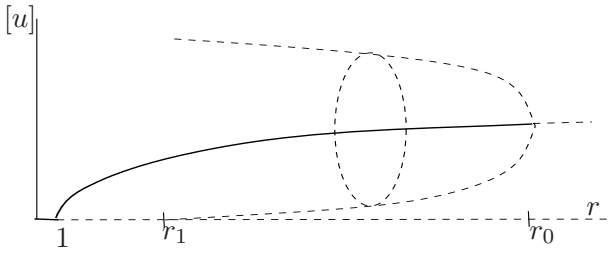


Figure 7.5. Résumé succinct du comportement du système de Lorenz pour de petites valeurs de r. Les lignes en pointillés indiquent les cycles limites et les points fixes instables.

constant en temps, ce qui contredit la contraction exponentionnelle de son volume sous l'action du flot de $X_{a,b,r}$.

Ce qui précède est une approche très simplifiée de l'étude de ce modèle. Par exemple que se passe-t-il en dehors des valeurs des paramètres prises par Lorenz ? Et nous n'avons pas exploré, même avec les valeurs standard de Lorenz, l'ensemble des phénomènes possibles. Lorsque r décroît à partir de r_0, les cycles limites instables, naissant au point de Hopf, se dilatent et passent très près du point-selle à l'origine (la branche nulle) pour $r_1 = 13.926$; alors les cycles (instables) deviennent des orbites *homoclines*, c'est-à-dire des orbites qui partent et arrivent au même point fixe. Notons qu'une orbite homocline n'est pas une orbite périodique car la trajectoire n'atteint jamais ce point fixe, mais s'en approche asymptotiquement lorsque $t \to \pm\infty$. Pour cette valeur r_1, l'origine devient une bifurcation *homocline*. Pour $r < r_1$, il n'y a plus de cycle limite (figure 7.5). On voit que l'analyse détaillée du système demande un examen plus approfondi pour lequel nous renvoyons à [65].

This page intentionally left blank

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham, J. Robbins, *Transversal mappings and flows*, W.A. Benjamin, New-York, 1967.

[2] V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la Mécanique classique,* Éditions Mir, Moscou, 1976.

[3] V. Arnold, *Catastrophe theory,* 3^{e} éd., Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.

[5] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'ordre dans le chaos,* Hermann, Paris, 1984.

[6] C. Bonatti, L. Diaz et M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective,* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics, III, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chapitres 1 à 5, Masson, Paris, 1981.

[8] R. Bowen, *Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms,* Lect. Notes in Mathematics, Vol. 470, Springer, New-York, 1975.

[9] H. W. Broer, *Formal normal forms theorems for vector fields and some consequences for bifurcations in the volume preserving case,* Lect. Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer, Berlin, 1981.

[10] A. D. Bruno, *Local methods in non-linear differential equations,* Springer Series Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[11] H. Cartan, *Cours de Calcul Différentiel,* Hermann, Paris, 1977.

[12] M. Chaperon, *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques,* Astérisque 138-139, SMF, Paris, 1986.

[13] M. Chaperon, *Calcul différentiel et calcul intégral, Licence 3. Master,* Sciences Sup., Dunod, Paris, 2008.

[14] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.
[15] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems,* Progress in Physics, 1. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.
[16] M. Demazure, *Calcul différentiel*, Cours de l'École polytechnique, Palaiseau, 1979.
[17] W. de Melo, S. Van Strien, *One-dimensional dynamics,* Results in Mathematics and Related Areas (3), 25. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[18] R. Descombes, *Intégration,* Enseignement des sciences 15, Hermann, Paris, 1972.
[19] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, tome 1,* Gauthier-Villars, Paris, 1968.
[20] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, tome 2,* Gauthier-Villars, Paris, 1968.
[21] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, tome 3,* Gauthier-Villars, Paris, 1968.
[22] J. Dixmier, *Topologie générale,* PUF, Paris, 1981.
[23] F. Dumortier, *Local study of planar vector fields,* dans : Structures in Dynamics, Finite Dimensional Deterministic Studies (H.W. Broer et al., eds), Stud. Math. Phys. 2, North-Holland, 1991.
[24] F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative theory of planar vector fields,* Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
[25] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor, H. Zoladek, *Bifurcations of planar vector fields, Nilpotent singularities and abelian integrals,* Lectures Notes in Mathematics n° 1480, p. 1-164, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1991.
[26] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac,* Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1992.
[27] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices,* tome 1, Dunod, Paris, 1966.
[28] R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers,* Dover, New-York, 1981.
[29] C. Godbillon, *Systèmes dynamiques sur les surfaces,* IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1979
[30] M. Golubitski, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1973.
[31] P. Hartman, *Ordinary differential equations,* John Wiley & Sons, New-York, 1964.
[32] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds,* Lectures Notes in Mathematics, n° 583, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.
[33] Y. Ilyashenko, *Finiteness Theorem for Limit Cycles,* Trans. Math. Monographs, Vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.

[34] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems,* Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 17, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2001.
[35] F. Khechichine, *Familles génériques à quatre paramètres de champs de vecteurs quadratiques du plan,* Thèse, Université de Bourgogne, 1991.
[36] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I,* Tracts in Pure and Applied Mathematics, N° 15, Vol. 1, John Wiley and Sons, New-York, 1963.
[37] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentiables,* PUG, Grenoble, 1996.
[38] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,* Edizioni Cremonese Roma, 1955.
[39] S. Lojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry,* Translated from the Polish by Maciej Klimek. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
[40] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Sciences*, 20, p. 130-141, March 1963.
[41] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions,* Oxford University Press, Oxford, 1966.
[42] B. Mandelbrot, *Les objets fractals,* Nouvelle Bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 1989.
[43] P. Mardesic, *Chebyshev systems and the versal unfolding of the cusps of order n*, Travaux en Cours, Vol. 57. Hermann, Paris, 1998.
[44] J. E. Marsden and M. Mac Craken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications,* Appl. Math. Sciences, vol. 19, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.
[45] P. W. Michor, *Manifolds of differentiable mappings,* Shiva Mathematics, Series 3, Shiva Publications, Orpington, UK, 1980.
[46] J. Milnor, *Morse theory,* Princeton University Press, 1963.
[47] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable,* Third edition. Annals of Mathematics Studies, 160. Princeton University Press, 2006.
[48] S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algèbre, solutions développées,* 2^e *partie,* Gauthier-Villars, Paris, 1973.
[49] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems, with spcial emphasis on celestial mechanics,* Annals of Mathematical Studies 77, Princeton University Press, 1973.
[50] V.V.Nemystskii, V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations,* Dover, New-York, 1989.
[51] J. C. Oxtoby, *Measure and category,* Graduate Texts in Mathematics 2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1971.
[52] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.

[53] J. Palis, F.Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations,* Cambridge studies in advanced mathematics 35, 1993.
[54] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications,* Dover, New-York, 1978.
[55] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de Mathématiques spéciales, 4, Séries et équations différentielles,* Masson, Paris, 1990.
[56] P.-A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1992.
[57] R. Roussarie, *Bifurcations of Planar Vector Fields and Hilbert's Sixteenth Problem,* Progress in Mathematics Vol. 164, Birkhauser ed., Basel, 1998.
[58] R. Roussarie, *Modèles locaux de champs et de formes,* Astérisque, Vol. 30, SMF, Paris, 1975.
[59] Ch. Rousseau, Normal forms, bifurcations and finiteness properties of vector fields, dans Normal forms, bifurcations ans finiteness problems in differential equations, Nato Sciences Series II, II. Mathematics, Physics and Chemistry - Vol. 137, Kluwer Academic Publishers, 2004.
[60] B. Salzman, Finite amplitude free convection as an initial value problem-I, *J. Atmospheric Sciences*, 19, p. 329-341, 1962.
[61] J.A. Saunders, F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1985.
[62] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques,* Astérisque, Vol. 56, SMF, Paris, 1978.
[63] L. Schwartz, *Analyse,* Hermann, Paris, 1970.
[64] S. Smale, Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 1967.
[65] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Appl. Math. Sciences, 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.
[66] M. Spivak, *Differential Geometry,* Publish or Perish, Berkeley, 1979.
[67] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles,* Princeton University Press, 1951.
[68] G.G. Szpiro, *La conjecture de Poincaré,* J.-C. Lattès, Paris, 2007.
[69] S. Tabachnikov, *Billiards,* Panoramas et synthèses, n° 1, SMF, Paris, 1995.
[70] F. Takens, Forced oscillations and bifurcations. Applications of global analysis, I (Sympos., Utrecht State Univ., Utrecht, 1973), p. 1-59. Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, n° 3, 1974.
[71] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogenèse,* Benjamin, 1967, Inter-Éditions, Paris, 1977.

[72] W. Tucker, The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sciences, Série I, Mathématiques*, 328, p. 1197–1202, 1999.

[73] P. Walters, *An introduction to ergodic theory,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.

[74] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos,* Text in applied mathematics 2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1990.

[75] R. Williams, *Expanding attractors,* Public. Math. IHÉS, Vol. 43, Bures-sur-Yvette, 1974.

[76] R. Williams, *The structure of Lorenz attractors,* Public. Math. IHÉS, Vol. 50, Bures-sur-Yvette, 1979.

This page intentionally left blank

INDEX

A

Application
  de Dulac (d'un point de selle), 253
  de Lorenz, 300
  Transformation de graphe, 76
  unimodale, 12
Attracteur, 9
  de Feigenbaum, 166
  de Hénon, 166
  de Lorenz, 166
  étrange, 302
  torique hyperbolique
    (Willians-Smale), 161
Axiome A, 157

B

Bassin d'attraction, 169
Bifurcation, 11, 167
  de Bogdanov-Takens, 240
  de doublement de période, 178
  de Hopf sous-critique, 177
  de Hopf sur-critique, 177
  de Hopf-Takens, 206
  de pli, 169
  des orbites périodiques, 250
  fourche, 290
    sur-critique, 291
    sous-critique, 291
  globale, 271
  queue d'aronde, 174
  selle-nœud de codimension 1, 169
Billard, 15
Boule absorbante, 289

C

$\mathcal{C}^\infty$-équivalence, 7
$\mathcal{C}^k$-stabilité structurelle, 10
Cartes direction
  famille, 235
  phase, 235
Catastrophe élémentaire, 171
Centre elliptique, 208
Cercle
  parallèle sur une surface, 130
  trivial, 130
Champ
  contractant hyperbolique, 62
  linéaire partiellement hyperbolique,
    188
  de Morse-Smale de S^1, 117
  de Morse-Smale sans points critiques
    sur le tore T^2, 131
  de Morse-Smale sur une surface
    compacte de genre 0, 118
  de Morse-Smale sur une surface
    orientable, 136
  éclaté, 234
Closing Lemma, 135
Codimension d'une singularité, 183
Compétition d'espèces, 17
Composante de Reeb, 126
Confinement, 287
Conjecture de cyclicité finie, 260
Conjugaison

de champs de vecteurs au-dessus de Φ, 181
locale, 113
(topologique) d'applications, 5
(topologique) de champs de vecteurs, 6
Connection
de selle, 119
de selle de codimension 1, 251
de selle de codimension quelconque, 256
(homocline) de selle, 251
Contraction hyperbolique, 65
Convergence de classe $\mathcal{C}^k$, 26
$\mathcal{C}^r$-équivalence
de déploiements de champs, 181
de familles, 180
Cusp, 173
Cycle limite, 260
Cyclicité d'un déploiement de champ, 260

D

Dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales, 147
Déploiement
de champs de vecteurs, 180
de type selle-nœud, 192
générique de polycycles hyperboliques, 256
réduit, 190
transversalement versel, 187
type fourche sous-critique, 291
type fourche sur-critique, 291
versel, 182
Désingularisation, 226
des déploiements, 233
Développement de Dulac, 257
Diagramme de bifurcation, 168
Difféomorphisme
d'Anosov-Thom, 159
topologiquement transitif, 157
Forte transversalité d'un difféomorphisme, 159
Domaine fondamental, 67

E

Éclatement
global de déploiement, 234
quasi homogène, 227
standard, 227
Ensemble
de bifurcation, 184
hyperbolique, 156
localement maximal, 157
résiduel, 33
topologiquement transitif, 157
Équations de la convection, 276
Équivalence
de champs au-dessus d'un homéomorphisme Φ, 180
de contact, 56
de déploiements au-dessus de Φ, 181
droite-gauche, 56
faible pour les champs sur $\mathbb{R}^2$, 222
locale, 113
(topologique) de champs de vecteurs, 6
Espace de Baire, 33
Exposant de Lyapounov, 302

F

Familles et déploiements induits, 181
Fer à cheval
au voisinage des points homoclines, 152
(de Smale) affine par morceaux, 140
général, 147
Feuilletages invariants locaux stables et instables, 96
Fibré
différentiel, 47
trivialisable, 48
Filtration
Bogdanov-Takens, 246
Hopf-Takens, 246
Selle-Nœud, 246
Fonctions de base, 277

Forme
normale, 197
normale de Poincaré-Dulac sur $\mathbb{C}$, 202
normale de Poincaré-Dulac sur $\mathbb{R}$, 201
normale de Talens, 205
normale pour les déploiements de champs, 205
normale pour les difféomorphismes, 206
Formulation et approximation variationnelles, 277
Formule de Poincaré-Pontriaguine, 267
Foyer
elliptique de codimension finie, 207
hyperbolique de codimension 0, 207
Fréchet, 29
Fronce, 173

G

Généricité, 23
Germe, 23
de champ en un point, 180
de champ partiellement hyperbolique, 231

I

Instabilité de Rayleigh-Bénard, 281
Intégrale abélienne, 269
Itinéraire, 144

K

k-jet, 42

L

Lacet cuspidal, 259, 237
λ-Lemma, 81, 88, 95
Lemme d'ombrage, 158
de fermeture, 135
fondamental de transversalité, 39
Linéarisation topologique locale, 102
Loi d'attraction universelle de Newton, 13

M

Modèle de Lorenz, 287
Modélisation, 1

N

Nombre
de Dulac d'un champ, 263
de rotation, 128

O

Orbite périodique hyperbolique, 250

P

Partition de Markov, 159
Pendule, 16
Pli, 169
Point
de selle, 70
errant et non errant, 138
fixe hyperbolique pour un difféomorphisme, 60
hétéroclines, 139
homocline, 107
homocline primaire, 153
homocline transverse, 153
récurrent, 138
semi-hyperbolique en dimension 2, 231
singulier hyperbolique pour un champ de vecteurs, 60
Polycycle
d'un champ de vecteurs, 249
élémentaire, 250
hyperbolique, 250
non élémentaire, 250
Propriété générique, 34
Pseudo-groupe structural, 55
Pseudo-orbite, 158

Q

Queue d'aronde, 174

R

Réduction à une variété
centrale, 188
Rapport d'hyperbolicité d'un point
de selle, 252

S

Séparatrices d'un point de selle, 252
Seizième problème
de Hilbert, 263
de Hilbert infinitésimal, 265
Sensibilité aux conditions
initiales, 302
Shadowing Lemma, 158
Singularité, 55
algébriquement isolée, 230
de champ de vecteurs, 180
de codimension ≥ 3, 247
elliptique, 206
Solénoïde, 162
Sous-filtration, 246
Stabilité structurelle locale, 114
Système
dynamique, définition, 2
dynamique de Morse-Smale, 138
structurellement stable
en classe $\mathcal{C}^k$, 112

T

Théorème
de division de Malgrange, 192
de Hartman-Grobman, 103
de Peixoto, 136
de Seidenberg, 231
de transversalité de Thom, 43, 46, 49
Smale-Palis, 139
Topologie
de Hausdorff, 91
de Whitney, 54
Transformation de graphe, 76
Translation de Bernouilli, 145
Transversalité, 23
forte, 159

V

Valuation d'un champ de vecteurs, 229
Valeur de bifurcation, 168
Variété
centrale, 188
invariante globale, 105
invariante locale stable et instable, 73
invariante locale stable et instable
pour une orbite périodique, 79